

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Н. И. Веткасов, Ю. В. Псигин

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Учебно-методическое пособие
для студентов, обучающихся по направлению
15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение
машиностроительных производств»

Ульяновск
УлГТУ
2017

УДК 621.391.01(075)

ББК 34.5:32.965я7

В 86

Рецензенты: кафедра «Математическое моделирование технических систем» Ульяновского государственного университета;
директор ООО «Центр ресурсосберегающих технологий» канд. техн. наук В. В. Сапунов

*Утверждено редакционно-издательским советом УлГТУ
в качестве учебно-методического пособия.*

Веткасов, Николай Иванович.

В 86

Основы математического моделирования : учебно-методическое пособие / Н. И. Веткасов, Ю. В. Псигин. – Ульяновск : УлГТУ, 2017. – 144 с.

ISBN 978-5-9795-1724-7

Учебно-методическое пособие разработано в соответствии с рабочей программой дисциплины «Основы математического моделирования» для студентов, обучающихся по направлению 15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств».

Пособие предназначено для использования при самостоятельной работе студентов и проведении лабораторных и практических занятий. В нем изложены основы применения для решения производственных задач методов теории графов и линейного программирования, оптимизации производственных систем и технологических процессов и принципы краткосрочного планирования в гибких производственных системах с использованием теории расписаний.

Пособие подготовлено на кафедре «Технология машиностроения» УлГТУ.

УДК 621.391.01(075)

ББК 34.5:32.965я7

ISBN 978-5-9795-1724-7

© Веткасов Н. И., Псигин Ю. В., 2017

© Оформление. УлГТУ, 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	7
ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС.....	10
Тема №1. Введение в математическое моделирование.....	10
1.1. Понятия и определения.....	10
1.2. Классификация моделей.....	11
1.3. Контрольные вопросы.....	19
Тема №2. Основные понятия теории множеств.....	20
2.1. Конечные и бесконечные множества.....	20
2.2. Понятие подмножества.....	22
2.3. Верхняя и нижняя границы множества.....	24
2.4. Операции над множествами.....	25
2.4.1. Объединение множеств.....	25
2.4.2. Пересечение множеств.....	26
2.4.3. Разность множеств.....	27
2.4.4. Универсальное множество.....	28
2.4.5. Дополнение множества.....	29
2.4.6. Тождества алгебры множеств.....	30
2.4.7. Упорядоченное множество.....	32
2.4.8. Прямое произведение множеств.....	34
2.5. Контрольные вопросы.....	35
Тема №3. Основы теории графов.....	36
3.1. Теоретико-множественное определение графа.....	36
3.2. Нахождение кратчайшего пути в графе с ребрами единичной длины.....	40
3.3. Нахождение кратчайшего пути в графе с ребрами произвольной длины.....	41
3.4. Контрольные вопросы.....	43

Тема №4. Оптимизация производственных и технологических систем.....	45
4.1. Основные определения.....	45
4.2. Математическая постановка задачи оптимизации.....	46
4.3. Контрольные вопросы.....	48
Тема №5. Линейное программирование.....	49
5.1. Основная задача линейного программирования.....	49
5.2. Симплекс-метод решения задачи линейного программирования.....	52
5.3. Табличный метод нахождения оптимального решения задачи линейного программирования.....	53
5.4. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования.....	55
5.5. Контрольные вопросы.....	58
Тема №6. Применение теории расписаний для краткосрочного планирования работы гибких производственных систем (ГПС)...	60
6.1. Задачи, решаемые теорией расписаний.....	60
6.2. Метод «ветвей и границ».....	63
6.3. Эвристические решающие правила.....	69
6.4. Контрольные вопросы.....	71
ЗАДАНИЯ И ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ.....	72
Практическое занятие №1. Решение задачи линейного программирования симплекс-методом.....	72
1.1. Пример решения.....	72
1.2. Задание к практическому занятию №1.....	75
Практическое занятие №2. Решение задачи линейного программирования табличным методом.....	77
2.1. Пример решения.....	77
2.2. Задание к практическому занятию №2.....	81

Практическое занятие №3. Моделирование операции лазерной обработки.....	82
3.1. Сущность моделируемой операции.....	82
3.2. Укрупненная модель.....	83
3.3. Уточненная математическая модель (учет теплопроводности).....	85
ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ.....	90
Методика выполнения лабораторных работ.....	90
Лабораторная работа №1. Размерный анализ технологического процесса с применением теории графов.....	91
1.1. Выявление технологических размерных цепей при помощи теории графов.....	91
1.2. Методика расчета технологических размерных цепей...	102
1.3. Задание к лабораторной работе №1	105
1.4. Содержание работы.....	105
1.5. Средства технологического оснащения.....	107
1.6. Порядок выполнения работы.....	109
1.7. Содержание отчета по лабораторной работе №1	110
Лабораторная работа №2. Составление расписаний при краткосрочном планировании работы гибких производственных систем с использованием метода «ветвей и границ».....	111
2.1. Пример составления расписания.....	111
2.2. Задание к лабораторной работе №2.....	112
2.3. Содержание работы.....	113
2.4. Средства технологического оснащения.....	113
2.5. Порядок выполнения работы.....	113
2.6. Содержание отчета по лабораторной работе №2.....	115
Лабораторная работа №3. Составление расписаний при краткосрочном планировании работы гибких производственных систем с использованием эвристических решающих правил.....	116

3.1. Пример составления расписания.....	116
3.2. Задание к лабораторной работе №3.....	119
3.3. Содержание работы.....	120
3.4. Средства технологического оснащения.....	120
3.5. Порядок выполнения работы.....	120
3.6. Содержание отчета по лабораторной работе №3.....	122
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	124
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	125
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.....	127
ОСНОВНЫЕ ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ПОНЯТИЯ.....	128
ПРИЛОЖЕНИЕ А. Первая страница (титульный лист) отчета.....	133
ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Минимальные припуски на механическую обработку.....	134
ПРИЛОЖЕНИЕ В. Допуски на диаметры валов и отверстий, а также линейные размеры.....	136
ПРИЛОЖЕНИЕ Г. Расчет технологических размерных цепей с применением ЭВМ.....	137
ПРИЛОЖЕНИЕ Д. Решение задачи краткосрочного планирования с использованием ЭВМ.....	142

ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование – это исследование явлений, процессов, систем или объектов путем построения и изучения их моделей и использования последних для определения или уточнения характеристик и рациональных способов построения вновь конструируемых технологических процессов, систем и объектов.

Математическая модель – это абстракция реального мира, в которой интересующие исследователя отношения между реальными элементами заменены подходящими отношениями между математическими категориями. Эти отношения, как правило, представлены в форме уравнений и (или) неравенств, характеризующих функционирование моделируемой реальной системы. Искусство построения математических моделей состоит в том, чтобы совместить как можно большую лаконичность в ее математическом описании с достаточной точностью модельного воспроизводства именно тех сторон анализируемой реальности, которые интересуют исследователя.

Моделирование – творческий процесс, требующий серьезной подготовки и переработки большого объема информации, сочетающий в себе трудоемкость и эвристические начала и носящий вероятностный (стохастический) характер.

«Основы математического моделирования» – одна из профилирующих дисциплин учебного плана направления 15.03.05 профиля «Технология машиностроения». В результате изучения данной дисциплины студенты должны получить представление о математических подходах к решению различных задач, возникающих при разработке технологических процессов.

Изучение данной дисциплины осложняется отсутствием учебников и учебных пособий, отвечающих требованиям программы и включающих все темы курса. Поэтому в настоящем пособии приве-

дены программа курса, темы, подлежащие изучению, с аннотированными пояснениями к ним и указанием литературных источников (табл. 1), с которыми рекомендуется ознакомиться при изучении дисциплины «Основы математического моделирования». Это не исключает возможности использования литературы, не указанной в списке, технической и другой документации. Кроме того, имеется возможность получения практически неограниченной информации через компьютерные информационные сети. Пособие должно помочь студенту изучить теоретический материал, продемонстрировать умение применять основные теоретические положения к решению конкретных практических задач.

Таблица 1

Содержание основных тем курса

№ п/п	Название темы	Содержание темы	Рекомендуемая литература (номер источника)
1	2	3	4
1	Введение в математическое моделирование	Понятия и определения. Задачи моделирования физических процессов и технологических систем. Математическая модель объекта моделирования. Классификация моделей. Основные этапы моделирования	2, 3, 6, 12, 13
2	Основные понятия теории множеств	Конечные и бесконечные множества. Понятие подмножества. Верхняя и нижняя границы множества. Операции над множествами: объединение, пересечение, разность множеств. Тождества алгебры множеств. Дополнение множества, отображения. Универсальное множество. Упорядоченное множество	1, 2, 4, 12, 13

Продолжение табл. 1

1	2	3	4
3	Основы теории графов	Теоретико-множественное определение графа. Отношение порядка и эквивалентности на графе. Задача о кратчайшем пути. Нахождение кратчайшего пути в графах с ребрами единичной и произвольной длины. Построение графа наименьшей длины	4, 7, 14, 16, 17
4	Оптимизация производственных систем	Основные определения. Математическая постановка задачи оптимизации. Локальный и глобальный экстремумы. Методы оптимизации	2, 8, 12, 13, 15
5	Линейное программирование	Задачи линейного программирования. Основная задача линейного программирования. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования. Симплекс-метод решения задачи линейного программирования. Табличный метод нахождения оптимального решения	2, 4 – 6, 11 – 13, 15
6	Теория расписаний	Задачи, решаемые теорией расписаний. Методы теории расписаний. Эвристические решающие правила. Задача о двух станках. Особенности краткосрочного планирования мелко- и среднесерийного производств	1, 5, 9, 10, 12 – 14

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС

Тема №1. Введение в математическое моделирование

1.1. Понятия и определения

Эта тема выполняет функцию введения в дисциплину «Основы математического моделирования».

Как уже говорилось во введении, *моделирование* – это исследование явлений, процессов, систем или объектов путем построения и изучения их моделей и использования последних для определения или уточнения характеристик и рациональных способов построения вновь конструируемых технологических процессов, систем и объектов.

Другими словами, моделирование – это замещение некоторого объекта *A* другим объектом *B*. Замещаемый объект называется *оригиналом*, замещающий – *моделью*. Таким образом, модель – заместитель оригинала. В зависимости от цели моделирования модель одного и того же оригинала может быть различной и, наоборот, – одна и та же модель может описывать совершенно различные по своей природе оригиналы.

В технике основной целью моделирования является изучение оригинала при помощи более простой его модели. С помощью моделирования можно решать самые разнообразные задачи.

Например, существенное уменьшение в последние годы в серийном производстве доли универсальных станков с ручным управлением и замена их станками с автоматическим циклом обработки (в том числе ЧПУ), делает актуальной задачу моделирования и расчетов на ЭВМ циклов управления процессами станочной обработки для обеспечения наибольшей производительности обработки и требуемого качества деталей. Конечной целью такого моделирования явля-

ется разработка систем автоматизированного проектирования технологических процессов.

Значительный практический интерес имеет моделирование процедур формирования параметров качества при механической обработке заготовок деталей, которое является основой прогнозирования и оптимизации точности.

Слово «модель» происходит от латинского *modus* (*копия, образ, очертание*). Наиболее простым и наглядным примером моделирования являются географические и топографические карты. Моделями являются схемы сборки изделий и сборочных единиц. Модель как средство познания стоит между логическим мышлением и изучаемым процессом, явлением.

В широком смысле слова модель – любой образ (мысленный или условный, изображение, описание, схема, чертеж, график, карта и т. п.) объекта, процесса или явления («оригинала» данной модели), используемый в качестве его «заменителя» или представителя.

1.2. Классификация моделей

Все модели можно разделить на *вещественные (физические) и идеальные* (наглядные, знаковые, математические). Ряд наглядных моделей составляют *схемы, карты, чертежи и графики*; ряд знаковых – *символы, алфавит, графовая запись и сетевое представление* изучаемых процессов или объектов [2, 3, 6, 12, 13].

Физическая модель – это установка, устройство или приспособление, позволяющие производить исследования путем замены изучаемого физического процесса или объекта подобным ему процессом или объектом той же физической природы.

Поиск оптимальных решений при физическом моделировании осуществляется с применением методов теории инженерного эксперимента. Метод физического моделирования достаточно универсален. Однако, несмотря на его универсальность, его применение часто затруднено из-за больших затрат средств, труда и времени. В ряде случаев применение физических моделей в целом практически невозможно. Например, существуют химическая, тепловая модели солнца, но невозможно создать маленькое солнышко на столе в стеклянной банке.

Математическая модель – это приближенное, выраженное в математических терминах представление процессов, систем и объектов, с помощью которого устанавливают абстрактные связи между компонентами реального процесса, системы или объекта. Известны *аналитические, имитационные, численные, функциональные и матричные* математические модели [12, 13].

Аналитическая модель – позволяет получать явные зависимости необходимых величин от параметров и переменных, характеризующих изучаемое явление. Аналитическое решение математического соотношения является обобщенным описанием объекта.

В самом общем виде ее можно записать так: $y = f(x)$. Здесь x – совокупность (вектор) входов; y – совокупность (вектор) выходов; f – функция, которая в случае, если она определена, может быть раскрыта в явном виде.

Наиболее полно исследование любой системы можно провести тогда, когда известны явные зависимости, связывающие искомые характеристики с начальными параметрами и переменными системы. Однако такие зависимости удастся получить только для сравнительно простых систем или тех случаев, когда сознательно не учитываются всевозможные связи между элементами системы.

Имитационная модель – численная математическая модель изучаемого объекта, предназначенная для реализации в процессе машинной имитации на ЭВМ в виде моделирующих алгоритмов (программ).

Имитационная модель позволяет вычислить значения выходных переменных и определять новое состояние, в которое переходит модель при заданных значениях входных переменных, параметров и исходного состояния модели.

Имитационное моделирование в отличие от численного характеризуется независимостью моделирующего алгоритма от типа информации, которую необходимо получить в результате моделирования.

Численная модель – математическое соотношение – характеризуется тем, что значения необходимых величин можно получить в результате применения методов приближенного решения математических задач, позволяющих свести решение задачи к выполнению конечного числа арифметических действий над числами. Численные методы сводят нахождение решения численной модели к вычислениям, выполняемым как вручную, так и с помощью ЭВМ. Однако все численные методы позволяют получить только частную информацию относительно искомых величин, поскольку для своей реализации требуют задания конкретных значений всех параметров, входящих в математическое соотношение. Для каждой искомой величины, в отличие от имитационного моделирования, приходится по-своему преобразовывать математическую модель и применять соответствующую численную процедуру или алгоритм.

Функциональная модель – имитирует только способ поведения оригинала, его функциональную зависимость от внешней среды.

Наиболее характерным примером служат модели, построенные на концепции «черного ящика». В этих моделях удастся воспроизвести функционирование оригинала, полностью отвлекаясь от его

содержимого и структуры, связывая с помощью математического соотношения различные входные и выходные величины.

Матричная модель – модель, построенная в виде таблицы (матрицы).

Широкое распространение матричных моделей связано, в частности, с тем, что запись данных в табличной форме облегчает их введение в ЭВМ и дает наглядное представление о результатах расчета.

Любая из перечисленных моделей может быть классифицирована: по поведению во времени (динамическая, статическая, квазистатическая); по виду входной информации (детерминированная, стохастическая, непрерывная, дискретная); по типу используемого математического аппарата (линейная, нелинейная, оптимизационная, неоптимизационная) [2, 12, 13].

Динамическая модель – модель, в которой как минимум одна ее переменная соотносится к периоду времени, отличному от времени, к которому отнесены другие переменные.

Динамические модели отражают поведение объекта моделирование во времени. Они необходимы, например, для того чтобы рассчитывать планы и программы работы предприятий, прогнозировать работу автоматизированных систем.

Для математического описания динамических моделей используются системы линейных дифференцированных уравнений, разностных уравнений, а также обыкновенных дифференциальных уравнений. Что касается практического применения динамических моделей, то оно находится пока еще в начальной стадии. Расчеты по динамическим моделям, хотя бы сколько-нибудь приближающиеся к реальности, чрезвычайно сложны либо приходится заведомо не учитывать действие многих случайных факторов, действующих на объект исследования.

Статическая модель – модель, в которой значения всех переменных относятся к одному моменту времени, и на этом отрезке времени могут рассматриваться как постоянные, т. е. при статическом моделировании тоже приходится идти на некоторые допущения.

Квазистатическая модель – модель системы, в которой поведение системы меняется от одного статического состояния к другому согласно внешним воздействиям. Наглядным примером таких моделей могут служить кадры старой кинохроники, когда перемотка киноплёнки осуществлялась со скоростью шестнадцать кадров в секунду. Человеческий глаз успевал фиксировать каждый отдельный кадр, но в целом создавалась иллюзия непрерывного движения объекта.

Детерминированная модель – аналитическое представление закономерности, процесса, операции и т. п., при котором для данной совокупности входных значений на выходе системы может быть получен единственный результат.

Такая модель может отображать как вероятностную систему (тогда она является ее некоторым упрощением), так и, чаще всего, детерминированную систему, в которой отсутствует «мешающее» влияние множества факторов. Другими словами, детерминированная модель отражает процессы, в которых предполагается отсутствие всяких случайных факторов.

Стохастическая модель – модель, в которой параметры, условия функционирования и характеристика состояния моделируемого объекта представлены случайными величинами и связаны стохастическими (т. е. случайными, нерегулярными) зависимостями, либо исходная информация также представлена случайными величинами.

Следовательно, характеристики состояния в модели определяются не однозначно, а через законы распределения их вероятностей. При этом реалистичнее, чем при детерминированном под-

ходе, отражается большинство процессов, имеющих, как правило, вероятностный (стохастический) характер.

Непрерывная модель – модель, в которой информация и параметры являются непрерывными величинами, а математические связи устойчивы.

Дискретная модель – модель, предназначенная для описания процессов, имеющих дискретный, фиксированный характер.

Например, с помощью дискретных моделей можно определять количественные показатели (число станков с ЧПУ, число инструментов, число транспортных средств и т. п.), характеризующие различные системы ГПС.

Линейная модель – модель, в которой все параметры, переменные и целевая функция связаны линейными зависимостями.

Нелинейная модель – модель, в которой содержатся радикалы, логарифмы и тригонометрические функции.

Оптимизационная модель – модель, выдающая исследователю экстремальное значение целевой функции с набором значений входных параметров и переменных, обеспечивающих это самое значение.

Неоптимизационная модель – модель, выдающая исследователю значение целевой функции по набору введенных входных параметров и переменных. Оценивает эффективность результатов и принимает решение о дальнейших изменениях в модели сам исследователь.

Достоверность – форма существования истины, обоснованной количественным способом (например, экспериментом, логическим доказательством) для познающего субъекта.

При математическом моделировании достоверность результатов моделирования оценивается путем различных процедур сопоставления модельных заключений, оценок, следствий и выводов с реально наблюдаемой действительностью. Саму процедуру оценки достоверности результатов моделирования называют *анализом адекватности*

(соответствия) модели ее моделируемому объекту, системе или процессу [3, 6, 13].

Адекватность – это в какой-то мере условное понятие, так как полного соответствия модели реальному объекту быть не может: иначе это была бы не модель, а сам объект. При моделировании имеется в виду не адекватность вообще, а адекватность тем свойствам модели, которые для исследования считаются существенными.

Проблема адекватности имеет особое значение для имитационных моделей. Их логические элементы должны логически соответствовать элементам реальной системы. Математический аппарат должен представлять реализуемые ими функции, а вероятностные характеристики – отражать вероятностный характер реальной системы.

Оценка адекватности имитационной модели складывается из двух частей – из оценки адекватности принципиальной структуры модели, т. е. ее замысла и оценки достоверности реализации.

Моделирование – творческий процесс, но тем не менее существует алгоритм, т. е. определенный набор шагов (этапов) при разработке математической модели [3, 12, 13]. Укрупненно процесс моделирования можно разбить на перечисленные ниже этапы.

На *первом этапе* определяют конечные цели моделирования, набор факторов и показателей, взаимосвязь между ними и их роль в рамках поставленной задачи: какие из них можно считать входными, а какие – выходными.

На *втором этапе* приступают к постулированию, математической формализации и, если возможно, к экспериментальной проверке исходных допущений. Если принимаемые допущения не могут быть проверены экспериментально, то их подкрепляют известными теоретическими рассуждениями о механизме, природе и качественном характере «физики» исследуемого процесса или объекта. Второй этап называют этапом анализа априорной информации.

Третий этап называют собственно моделирующим. Он включает в себя непосредственный вывод общего вида модельных соотношений, связывающих входные и выходные параметры между собой. Следует подчеркнуть, что на данном этапе определяется лишь структура модели, в которой, наряду с известными числовыми значениями, будут присутствовать величины, физический смысл которых определен, а числовые значения – нет.

На *четвертом этапе* моделирования (статистический анализ модели) с помощью методов статистической обработки данных решают задачу наилучшего подбора неизвестных параметров, входящих в аналитическую запись модели, и исследования свойств полученных оценок.

Пятый этап посвящен процедуре сопоставления модельных значений с реально наблюдаемой действительностью. Это этап статистического анализа адекватности модели.

На *шестом этапе* планируют и проводят исследования, направленные на уточнение модели, т. е. на дальнейшее развитие и углубление второго этапа, который в определенной мере является ключевым. Необходимость шестого этапа зависит от результатов пятого.

Таким образом, моделирование требует серьезной подготовки и переработки большого объема информации, сочетает в себе трудоемкость и неопределенность, что говорит о стохастическом (вероятностном) характере всех достаточно серьезных математических моделей.

В заключение этого занятия следует отметить, что при разработке и исследовании математических моделей широко используется аппарат дискретной математики, в частности теория множеств, теория графов, арсенал средств и методов, накопленных в теории вероятностей и математической статистике. В связи с этим на следующих занятиях рассмотрим основные понятия теории множеств и графов.

1.3. Контрольные вопросы

1. Дайте определение модели.
2. Что такое моделирование?
3. Приведите общую классификацию моделей.
4. Приведите общую классификацию математических моделей.
5. Какие модели составляют группу наглядных моделей?
6. Какие модели составляют группу знаковых моделей?
7. Приведите классификацию моделей по поведению модели во времени.
8. Приведите классификацию моделей по виду входных параметров и переменных, входящих в математическую модель.
9. Приведите классификацию моделей по типу используемого математического аппарата.
10. Что такое адекватность математической модели?

Тема №2. Основные понятия теории множеств

2.1. Конечные и бесконечные множества

Понятие множества является одним из тех фундаментальных понятий математики, которым трудно дать четкое определение, используя элементарные понятия. Поэтому мы ограничимся описательным объяснением понятия множества.

Множеством называется совокупность определенных вполне различаемых объектов, рассматриваемых как единое целое [1, 4, 12].

Можно говорить о машиностроительном цикле, множестве рабочих на участке, множестве состояний технологической системы. При этом о множестве можно вести речь только тогда, когда элементы множества различны между собой. Например, нельзя говорить о множестве капель в стакане воды, так как невозможно четко и ясно указать каждую каплю в отдельности.

Определенные объекты, из которых состоит множество, называются *элементами множества* [4, 13].

Общим обозначением множества служит пара фигурных скобок {}, внутри которых перечисляются элементы множества. Для обозначения конечных множеств используют прописные буквы $A, B, C, \dots, X$ или прописные буквы с индексом $A_1, A_2, \dots$. Для обозначения элементов множества используют строчные буквы $a, b, c, \dots$ или строчные буквы с индексом $a_1, a_2, \dots$.

Если мы хотим указать, что объект a является элементом множества S , то будем писать $a \in S$ и говорить, что a является элементом множества S или a принадлежит множеству S . Если же мы хотим указать, что a не является элементом множества S то будем писать $a \notin S$. Записью $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$ будем пользоваться в качестве сокращения записи $x_1 \in S, x_2 \in S, \dots, x_n \in S$.

Множества бывают конечными и бесконечными [4].

Множество называется *конечным*, если число его элементов конечно, т. е. если существует натуральное число N , являющееся числом элементов множества.

Множество называется *бесконечным*, если оно содержит бесконечное число элементов.

Для того чтобы оперировать с конечными множествами, нужно уметь задавать эти множества.

Существуют два способа задания множества: *перечисление и описание*.

Задание множества способом перечисления соответствует перечислению всех элементов, составляющих множество. Так, множество отличников группы можно задать, перечислив студентов, которые учатся на отлично, например {Иванов, Петров, Сидоров}. Такой способ удобен при рассмотрении конечных множеств, содержащих небольшое количество элементов, но иногда он может применяться и для задания бесконечных множеств, например {2, 4, 6, 8, ...}. Естественно, что такая запись применима, если вполне ясно, что понимается под многоточием.

Описательный способ задания множества состоит в том, что указывается характерное свойство, которым обладают все элементы множества. Так, если M – множество инструментов в инструментальной кладовой, то множество A токарных резцов запишется в виде $A = \{x \in M : x - \text{токарный резец}\}$, что читается следующим образом: множество A состоит из элементов x множества M , обладающих тем свойством, что x является токарным резцом.

В тех случаях, когда не возникает сомнений из какого множества берутся элементы x , указание о принадлежности x множеству M можно не делать. При этом множество A записывается в виде: $A = \{x : x - \text{токарный резец}\}$.

Важным понятием теории множеств является понятие пустого множества [4]. *Пустым множеством* называется множество, не содержащее ни одного элемента. Пустое множество обозначается $\emptyset$.

$$\text{Например, } \{x \in C : x^2 + x + 1 = 0\} = \emptyset$$

Понятие пустого множества играет очень важную роль при задании множества с помощью описания. Так без понятия пустого множества мы не могли бы говорить о множестве токарных резцов на инструментальном складе, не убедившись предварительно, есть ли вообще на инструментальном складе токарные резцы. Введение понятия пустого множества позволяет совершенно спокойно оперировать с множеством токарных резцов на инструментальном складе, не заботясь о том, есть или нет на инструментальном складе токарные резцы. Пустое множество будем относить к конечным множествам.

Рассмотрим вопрос о равенстве множеств.

Два множества называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов, т. е. представляют собой одно и то же множество.

Множества X и Y не равны ($X \neq Y$), если либо в множестве X есть элементы не принадлежащие Y , либо в множестве Y есть элементы, не принадлежащие X .

Легко видеть, что для любых множеств X , Y , Z , если $X = Y$ и $Y = Z$, то $X = Z$; если $X = Y$ и $Y = Z$, то $X = Z$.

Из определения равенства множеств вытекает, что порядок элементов множества $\{3, 4, 5, 6\}$ и $\{4, 5, 6, 3\}$ представляют собой одно и то же множество.

2.2. Понятие подмножества

Множество X является подмножеством множества Y , если элемент множества X принадлежит множеству Y [1, 4].

Пусть Y – множество инструментов в инструментальной кладовой, а X – множество токарных резцов в той же кладовой. Так как каждый токарный резец находится в инструментальной кладовой и является инструментом, хранящемся в кладовой, то множество X является подмножеством множества Y .

Многие определения теории множеств удобно давать в виде математических выражений, содержащих некоторые, логические символы. Для определения подмножества используем два таких символа: $\forall$ – символ, называемый квантором, означающий «любой; какой бы ни был; для всех»; $\rightarrow$ – символ следствия (импликации), означающий «влечет за собой».

Определение подмножества, которое может быть сформулировано в виде: для любого x утверждение « x принадлежит X » влечет за собой утверждение « x принадлежит Y ».

$$\forall x : x \in X \rightarrow x \in Y ,$$

более короткой записью выражения « x является подмножеством y » будет запись $X \subseteq Y$, что читается как « Y содержит X ». Используемый здесь символ « $\subseteq$ » означает включение. Если не подчеркнуть, что Y содержит и другие элементы, кроме элементов из X , то используют символ строгого включения « $\subset$ »: $X \subset Y$.

Связь между символами $\subset$ и $\subseteq$ дается выражением:

$$X \subset Y \leftrightarrow X \subseteq Y \quad X \neq Y$$

Здесь использован символ « $\leftrightarrow$ », означающий эквивалентность.

Отметим некоторые свойства подмножества, вытекающие из его определения:

$$X \subseteq X \text{ (рефлексивность)}$$

$$[X \subseteq Y \text{ и } Y \subseteq Z] \rightarrow X \subseteq Z \text{ (транзитивность)}$$

Несколько труднее судить, что для любого множества M $\emptyset \subseteq M$.

Действительно пустое множество $\emptyset$ не содержит элементов. Следовательно, добавляя к M пустое множество, к M фактически

ничего не добавляется. Поэтому всегда можно считать, что любое множество M содержит в себе пустое множество в качестве подмножества.

2.3. Верхняя и нижняя границы множества

Имея дело с множеством вещественных чисел, можно сравнить элементы этого множества по величине. При этом часто возникает задача определения наибольшего или наименьшего элемента множества. Для конечного множества это задача не представляет труда. Так для множества $A = \{2, 5, 7, 8, 9\}$ $\min A = 2$; $\max A = 9$. Однако для бесконечных множеств положение может быть иным.

Пусть R — множество всех вещественных чисел, а $S = \{x \in R : -\infty < x < +\infty\}$. Множество S представляет собой незамкнутый отрезок вещественной оси и не имеет наибольшего и наименьшего элементов.

Однако можно говорить о границах такого множества, понимая под ними числа m и M , дополняющие множество S до замкнутого отрезка. При этом точка M называется верхней границей множества S или «супремумом», и обозначается $M = \sup S$, а точка m называется нижней границей множества S , или «инфинумом», и обозначается $m = \inf S$ [4].

Рассмотрим теорему о верхней и нижней границах подмножества. Если $B \subseteq A$, то $\inf B \geq \inf A$; $\sup B \leq \sup A$.

Доказательство. Обозначим через b' элемент множества B , имеющий наименьшее значение, т. е. $b' \in B$ и $b' = \inf B$. Но $B \subseteq A$, т. е. $b' \in A$. Пусть a' элемент множества A , имеющий наименьшее значение, т. е. $a' \in A$ и $a' = \inf A$. При этом, если $b' = a'$, то $b' = \inf A$, если $b' \neq a'$, то $b' > a' = \inf A$. Таким образом, $b' \geq \inf A$ или $\inf B \geq \inf A$. Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

2.4. Операции над множествами

2.4.1. Объединение множеств

Объединением множеств X и Y называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств X , Y , т. е. принадлежат X или принадлежат Y [4, 12, 13].

Объединение X и Y обозначается через $X \cup Y$. Формальное определение: $x \in X \cup Y \leftrightarrow x \in X$ или $x \in Y$. Объединение множеств иногда называют суммой множеств и обозначают $X + Y$. Однако свойства объединения множеств несколько отличаются от свойств суммы в обычном арифметическом понимании. Поэтому этим термином мы пользоваться не будем.

Пример. Если $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $Y = \{2, 4, 6, 7\}$, то $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Для объединения множеств справедливы коммутативный и ассоциативный законы.

$X \cup Y = Y \cup X$ – коммутативный закон, или переместительный закон алгебры ($a + b = b + a$; $a \cdot b = b \cdot a$).

$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z) = X \cup Y \cup Z$ – ассоциативный закон, или сочетательный закон алгебры $(a + b) + c = a + (b + c)$; $(a \cdot b) \cdot c = a(b \cdot c)$.

Справедливость этих законов вытекает из того, что левая и правая части равенств состоят из одних и тех же элементов.

Далее $X \cup \emptyset = X$. Это также очевидное соотношение, так как пустое множество не содержит элементов, а значит, X и $X \cup \emptyset$ состоят из одних и тех же элементов. Из этого уравнения видно, что $\emptyset$ играет роль нуля в алгебре множеств.

Графически объединение множеств X и Y можно проиллюстрировать следующим образом. Рассмотрим два круга. Если X – множе-

ство точек левого круга, а Y – множество точек правого круга, то $X \cup Y$ представляет собой заштрихованную область, ограниченную обоими кругами.

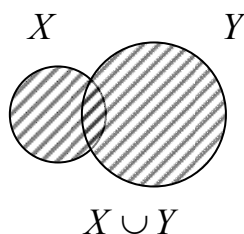


Рис. 1. Объединение множеств

2.4.2. Пересечение множеств

Пересечением множеств X и Y называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству X , так и множеству Y [4, 12, 13]. Пересечение множеств X и Y обозначается через $X \cap Y$. Формальное определение $x \in X \cap Y \leftrightarrow x \in X$ и $x \in Y$

Пример. Если $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $Y = \{2, 4, 6\}$, то $X \cap Y = \{2, 4\}$.

Графически пересечение множеств X и Y можно проиллюстрировать следующим образом. Если X множество точек левого круга, а Y – множество точек правого круга, то $X \cap Y$ представляет собой заштрихованную область, являющуюся общей частью обоих кругов.

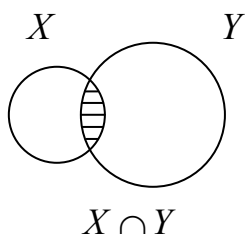


Рис. 2. Пересечение множеств

Множества X и Y называются непересекающимися, если они не имеют общих элементов, т. е. если $X \cap Y = \emptyset$.

Пример. Непересекающимися являются множества $X = \{1, 2, 3\}$ и $Y = \{4, 5, 9\}$.

Нетрудно видеть, что пересечение множеств обладает коммутативным свойством: $X \cap Y = Y \cap X$;

и ассоциативным: $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z) = X \cap Y \cap Z$.

Заметим также, что имеет место соотношение $X \cap \emptyset = \emptyset$.

В данном случае пустое множество играет роль нуля в алгебре множеств.

2.4.3. Разность множеств

Данная операция в отличие от операций объединения и пересечения определяется только для двух множеств. Разностью множеств X и Y называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат X и не принадлежат Y .

Разность множеств X и Y обозначается через $X \setminus Y$ [4, 12, 13].

Таким образом, $x \in X \setminus Y \leftrightarrow x \in X$ и $x \notin Y$.

Графически разность множеств X и Y может быть представлена заштрихованной областью на рис. 3.

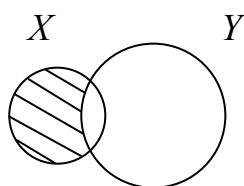


Рис. 3. Разность множеств

Пример. $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{2, 4, 6, 7\}$, тогда $X \setminus Y = \{1, 3, 5\}$;
 $Y \setminus X = \{6, 7\}$.

2.4.4. Универсальное множество

Как мы видели, роль нуля в алгебре множеств играет пустое множество. Спрашивается, не существует ли множество J , которое будет играть роль единицы, т. е. удовлетворять условию: $X \cap J = X$, аналогичному условию $a \cdot 1 = a$ в обычной алгебре.

Соотношение $X \cap J = X$ означает, что пересечение или общая часть множества J и множества X для любого множества X совпадает с самим этим множеством. Но это возможно лишь в том случае, если J содержит все элементы, из которых может состоять множество X , так что любое множество X полностью содержится в множестве J .

Множество J , удовлетворяющее этому условию, называется *полным или универсальным или единичным*.

Исходя из сказанного, можно дать следующее определение универсального множества [4, 12, 13].

Если в некотором рассмотрении участвуют только подмножества некоторого фиксированного множества J , то это самое большое множество называется универсальным множеством.

Следует отметить, что в различных конкретных случаях роль универсального множества могут играть различные множества. Так, при рассмотрении множеств студентов в группе (отличники; студенты, получающие стипендию; студенты, проживающие в общежитии и др.) роль универсального множества играет множество студентов в группе.

Универсальное множество можно изображать графически в виде множества точек прямоугольника.



Рис. 4. Универсальное множество

Отдельные области внутри этого прямоугольника будут означать различные подмножества универсального множества.

Изображение множеств в виде областей в прямоугольнике, представляющем универсальное множество, называется *диаграммой Эйлера-Венна*.

Универсальное множество обладает интересным свойством, которое не имеет аналогии в обычной алгебре, а именно, для любого множества X справедливо соотношение $X \cup J = J$.

Действительно, объединение $X \cup J$ представляет собой множество, в которое входят как все элементы множества X , так и все элементы множества J . Но множество J включает в себя элементы множества X , так что $X \cup J$ будет состоять из тех же элементов, что и J , т. е. представляет собой универсальное множество J .

2.4.5. Дополнение множества

Множество $\bar{X}$, определяемое из соотношения $\bar{X} = J \setminus X$, называется дополнением множества X (до универсального множества J).

На рис. 5 множество $\bar{X}$ представляет собой незаштрихованную область.

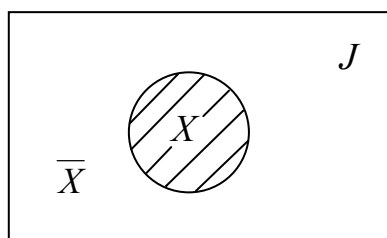


Рис. 5. Дополнение множества

Формальное определение $\bar{X} = \{x : x \in J \text{ и } x \notin X\}$

Пример. Если $J = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ и $X = \{3, 5, 7\}$, то $\bar{X} = \{1, 2, 4, 6\}$.

Множества X и $\bar{X}$ не имеют общих элементов, так что $X \cap \bar{X} = \emptyset$ [4, 12, 13].

Кроме того, не имеется элементов J , которые не принадлежали бы ни X , ни $\bar{X}$, так как те элементы, которые не принадлежат X , принадлежат $\bar{X}$, следовательно, $X \cup \bar{X} = J$.

Из симметрии формулы относительно X и $\bar{X}$ следует не только то, что $\bar{X}$ является дополнением X , но что X является дополнением $\bar{X}$. Но дополнение $\bar{X}$ есть $\bar{\bar{X}}$. Таким образом, $\bar{\bar{X}} = X$.

С помощью операции дополнения можно в удобном виде представить разность множеств

$$X \setminus Y = \{x : x \in X \text{ и } x \notin Y\} = \{x : x \in X \text{ и } x \in \bar{Y}\}, \text{ т. е. } X \setminus Y = X \cap \bar{Y}.$$

2.4.6. Тожества алгебры множеств

1. Рассмотрим две диаграммы Эйлера-Венна для выражений $(X \cup Y) \cap Z$ и $(X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$

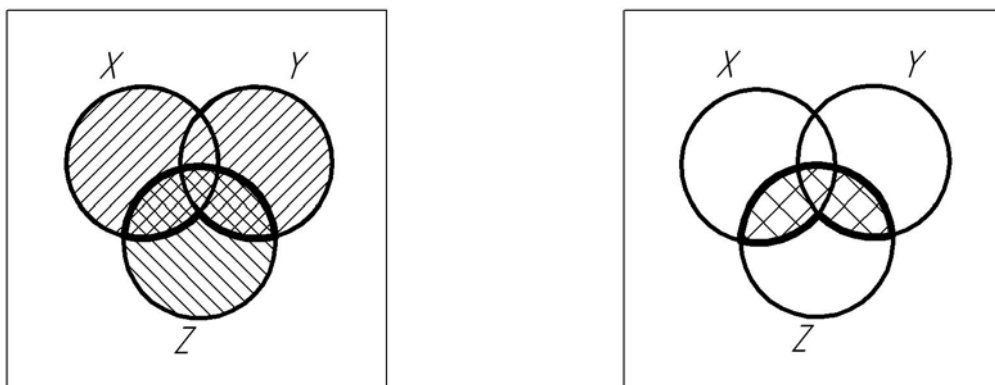


Рис.6. Геометрическая интерпретация тождества

$$(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$$

Из этих диаграмм видно, что оба выражения определяют одно и то же множество, так что в алгебре множеств имеет место тожде-

ство $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$, аналогичное дистрибутивному закону $(a + b)c = a \cdot c + b \cdot c$ в обычной алгебре.

2. В обычной алгебре мы не можем заменить в дистрибутивном законе действие сложения умножением, а действия умножения сложением, так как это приводит к абсурдному выражению $(ab) + c = (a + c)(b + c)$. Иначе обстоит дело в алгебре множеств.

Рассмотрим две диаграммы Эйлера-Венна

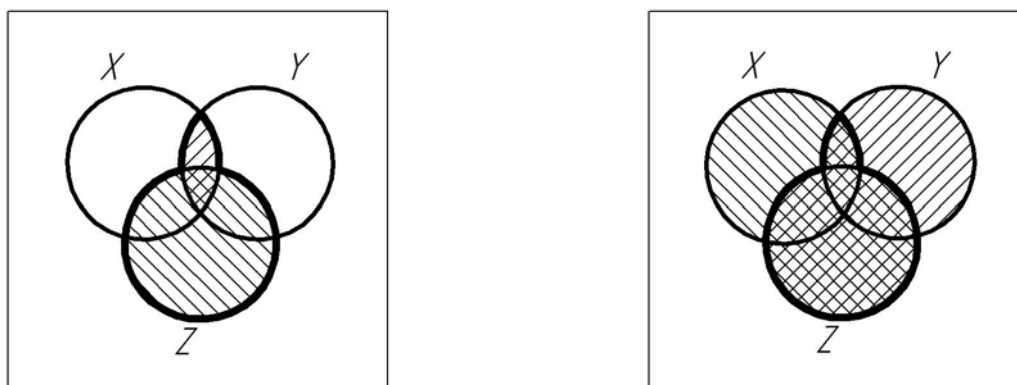


Рис.7. Геометрическая интерпретация тождества

$$(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$$

На диаграмме дана геометрическая иллюстрация алгебраических выражений $(X \cap Y) \cup Z$ и $(X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$.

Оба эти выражения дают одно и то же множество, так что имеет место тождество

$$(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$$

3. Легко убедиться, что если $Y \leq X$, то $X \cap Y = Y$, $X \cup Y = X$.

Действительно, все элементы множества Y являются в то же время и элементами множества X . Значит пересечение этих множеств, т. е. общая часть множеств X и Y совпадет с Y . В объединение множеств X и Y множество Y не внесет ни одного элемента, который уже не входил бы в него, будучи элементом множества X , а значит, $X \cup Y$ совпадает с X .

4. $X \cap X = X$; $X \cup X = X$.

5. $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$

Предположим, что $X \in \overline{X \cup Y}$, т. е. что $X \notin X \cup Y$. Это значит, что $X \notin X$ и $X \notin Y$, т. е. $X \in \overline{X}$ и $X \in \overline{Y}$. Предположим, что $y \in \overline{X \cap Y}$, т. е. $y \in \overline{X}$ и $y \in \overline{Y}$. Это значит, что $y \notin X$ и $y \notin Y$, то же, что $y \notin X \cup Y$. Следовательно, $y \in \overline{X \cup Y}$.

$$6. \overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}.$$

Докажем, приведя обе его части к одиночному виду. Выполняя операции дополнения над обеими частями, получим $\overline{\overline{X \cap Y}} = \overline{\overline{X} \cup \overline{Y}}$. Левая часть этого выражения дает $X \cap Y$. То же самое получим, преобразовывая первую часть по тождеству 5 [4, 12, 13].

2.4.7. Упорядоченное множество

Наряду с понятием множества как совокупности элементов важным понятием является упорядоченное множество, или кортежа.

Кортежем называется последовательность элементов, т. е. совокупность элементов, в которой каждый элемент занимает определенное место [4, 12, 13]. Сами элементы при этом называются элементами кортежа (первая компонента, вторая компонента и т. д.)

Пример кортежа: множество людей, стоящих в очереди. Во всех кортежах место каждого элемента является вполне определенным и не может быть произвольно изменено.

Число элементов кортежа называется его длиной. Для обозначения кортежа используют круглые скобки.

$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ – кортеж длины n с элементами $a_1, a_2, \dots, a_n$.

В отличие от обычного множества в кортеже могут быть и одинаковые элементы: два одинаковых слова в фразе, одинаковые численные долготы и широты точки на местности и др.

В дальнейшем будем рассматривать упорядоченные множества, элементами которых являются вещественные числа. Такие упорядоченные множества называют точками пространства, или векторами.

Так кортеж (a_1, a_2) может рассматриваться как точка на плоскости или вектор, проведенный из начала координат в данную точку (рис. 8, а).

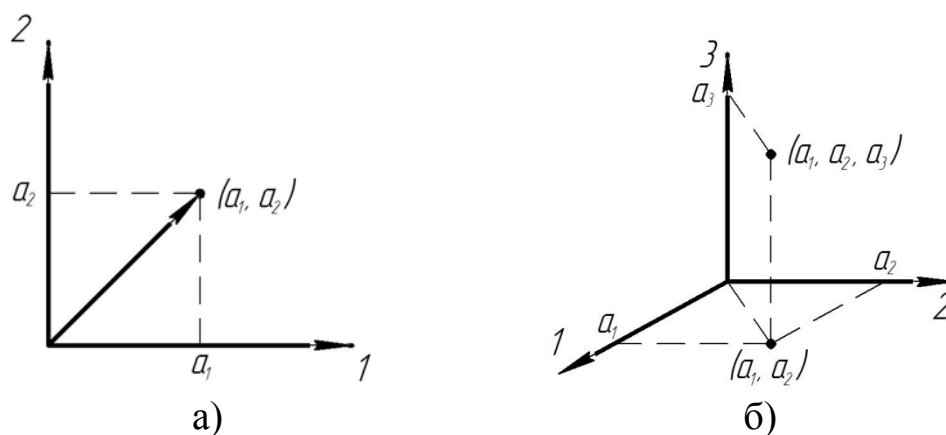


Рис. 8. Проекция двух- (а) и трехэлементного (б) кортежа

Компоненты a_1 и a_2 будут проекциями вектора на оси 1 и 2.

$$\text{ПР}_1(a_1, a_2) = a_1; \text{ПР}_2(a_1, a_2) = a_2.$$

Кортеж (a_1, a_2, a_3) может рассматриваться как точка в трехмерном пространстве или как трехмерный вектор, проведенный из начала координат в эту точку (рис. 8, б). Проекции вектора на оси координат

$$\text{ПР}_i(a_1, a_2, a_3) = a_i, i = 1, 2, 3.$$

Однако в данном случае можно говорить о проекции кортежа сразу на две оси, например, 1 и 2, т. е. на координатную плоскость. Нетрудно видеть, что эта проекция представляет собой двухэлементный кортеж

$$\text{ПР}_{12}(a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2).$$

2.4.8. Прямое произведение множеств

Прямым произведением множеств X и Y называется множество, обозначаемое $X \times Y$ и состоящее из всех тех и только тех упорядоченных пар, первая компонента которых принадлежит множеству X , а вторая – множеству Y [4]. Таким образом, элементами прямого произведения множеств являются двухэлементные кортежи вида (x, y) .

Формальное определение:

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Пример. Пусть $X = \{1, 2\}$ и $Y = \{1, 3, 4\}$. Тогда

$$X \times Y = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4)\}.$$

Геометрически это может быть представлено в следующем виде (рис. 9, а).

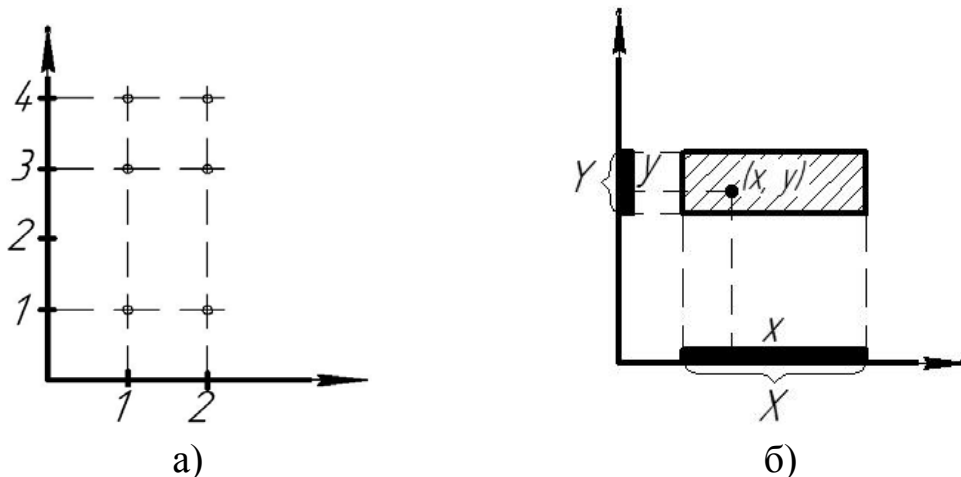


Рис.9. Координаты точек (а) и площадь (б) прямого произведения множеств

Пусть X и Y – отрезки вещественной оси. Прямое произведение $X \times Y$ изобразится заштрихованным прямоугольником (рис. 9, б).

Из этого рисунка следует, что свойства прямого произведения отличаются от свойств обычного произведения в арифметическом смысле. В частности, прямое произведение изменяется при изменении порядка сомножителей, т. е. $X \times Y \neq Y \times X$.

2.5. Контрольные вопросы

1. Дайте определение множества.
2. Что такое элемент множества?
3. Назовите способы задания множеств.
4. Дайте определение объединения множеств.
5. Дайте определение пересечения множеств.
6. Дайте определение разности множеств.
7. Что такое универсальное множество?
8. Докажите графически два-три тождества алгебры множеств.
9. Что такое кортеж?
10. Что такое прямое произведение множеств?

Тема №3. Основы теории графов

3.1. Теоретико-множественное определение графа

Наглядное представление о графе можно получить, если представить себе некоторое множество точек плоскости X , называемых *вершинами*, и множество направленных отрезков U , соединяющих все или некоторые из вершин и называемых *дугами* (рис. 10). Математически граф G можно определить как пару множеств X и U : $G = (X, U)$ [4, 5, 11 – 14].

Иногда бывает удобно дать графу другое определение. Можно считать, что множество направленных дуг U , соединяющих элементы множества X , отображает это множество само в себя. Поэтому можно считать граф заданным, если дано множество его вершин X и способ отображения Γ множества X в X . Таким образом, граф G есть пара (X, Γ) , состоящая из множества X и отображения Γ , заданного на этом множестве: $G = (X, \Gamma)$.

Такое определение графа дает возможность представления графа в виде матриц смежности и инцидентности (рис. 11, 12). Следует пояснить, что две вершины графа x и y являются смежными, если они различны и если существует дуга u , идущая из x в y ; дуга u называется *инцидентной* вершине x , если она заходит в эту вершину или выходит из нее. Все это относится только к *ориентированному* графу.

Любой граф $G = (x, y)$ с m вершинами может быть представлен матрицей смежности размера $m \times m$ при условии, что вершинам графа приписаны некоторые (произвольные) метки [12, 13]. Если вершины графа помечены метками $x_1, x_2, \dots, x_n$, то матрица смежности $A(G)$ определяется следующим образом: $A(G) = [a_{ij}]$,

где $a_{ij} = 1$, если имеется дуга, соединяющая вершину x_i с вершиной x_j ; $a_{ij} = 0$, – в противном случае.

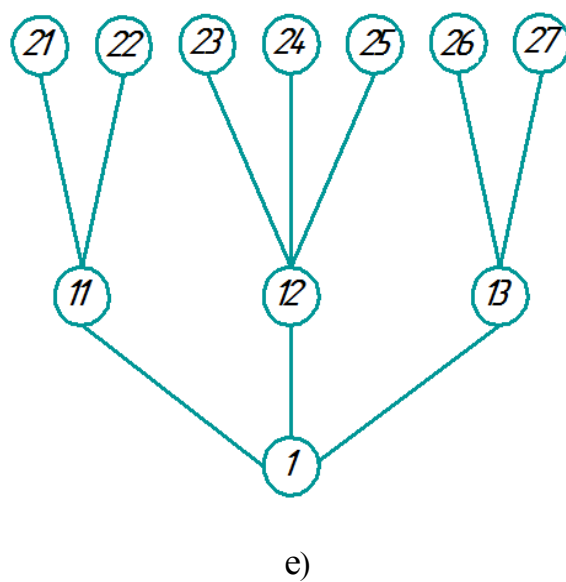
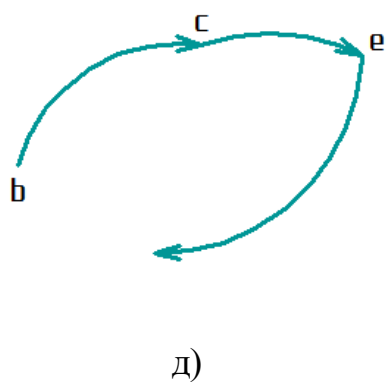
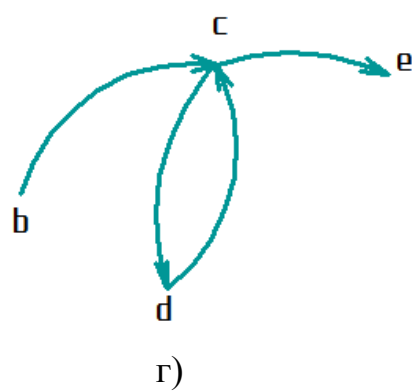
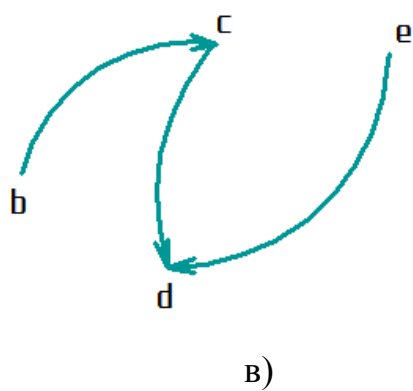
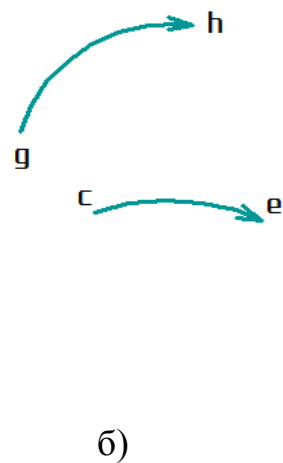
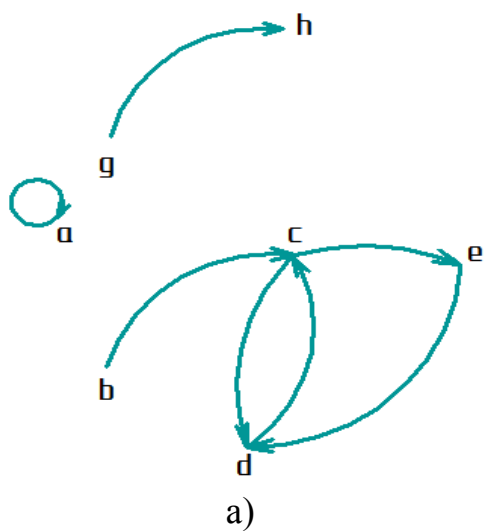


Рис. 10. Примеры представления элементов графа:
 общий вид графа (а); подграф (б); частичный граф (в); простой путь в графе (г);
 элементарный путь в графе (д); дерево (е)

В качестве примера приведем граф и матрицу его смежности для оценки геометрической структуры детали (рис. 11).

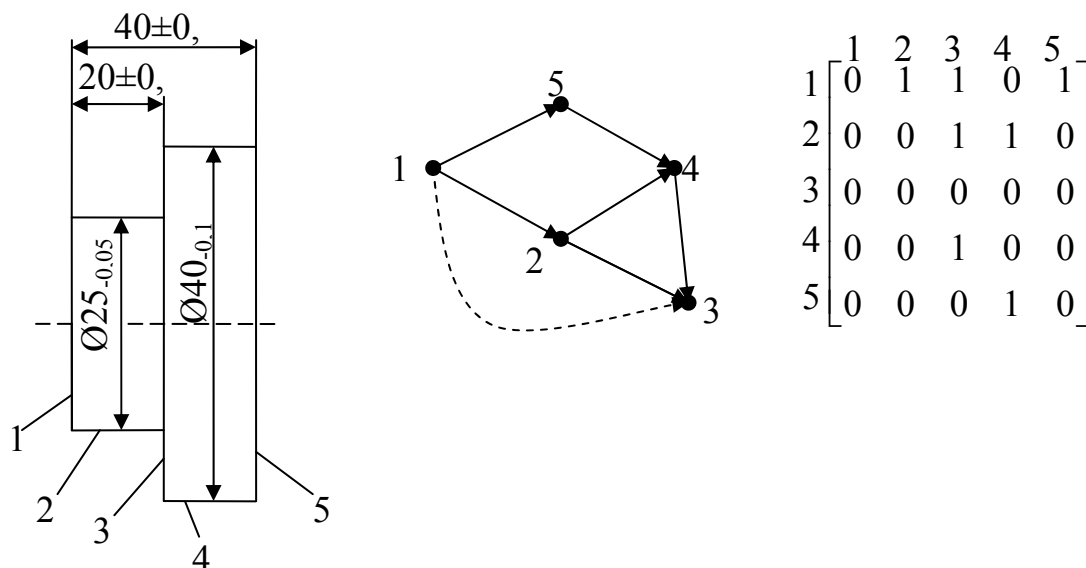


Рис. 11. Граф и матрица смежности геометрической структуры детали

Второй метод представления графа использует матрицу инцидентности [12, 13].

Матрица инцидентности порядка $m \times n$ определяется следующим образом: $B(G) = [b_{ij}]$,

где $i = 1 \dots m$ – количество вершин графа, $j = 1 \dots n$ – количество дуг графа.

$$b_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{если дуга } u_i \text{ исходит из } x_i; \\ -1, & \text{если дуга } u_i \text{ заходит в } x_i; \\ 0, & \text{если дуга } u_i \text{ не инцидентна } x_i. \end{cases}$$

Далее для примера приведем граф и матрицу инцидентности для маршрутного технологического процесса (ТП) (рис. 12). Буквами обозначен порядок выполнения операций.

Матрицы инцидентности в описанном виде применимы только к графам без петель. При наличии в графе петель эту матрицу следует расчленить на две полуматрицы : положительную и отрицательную.

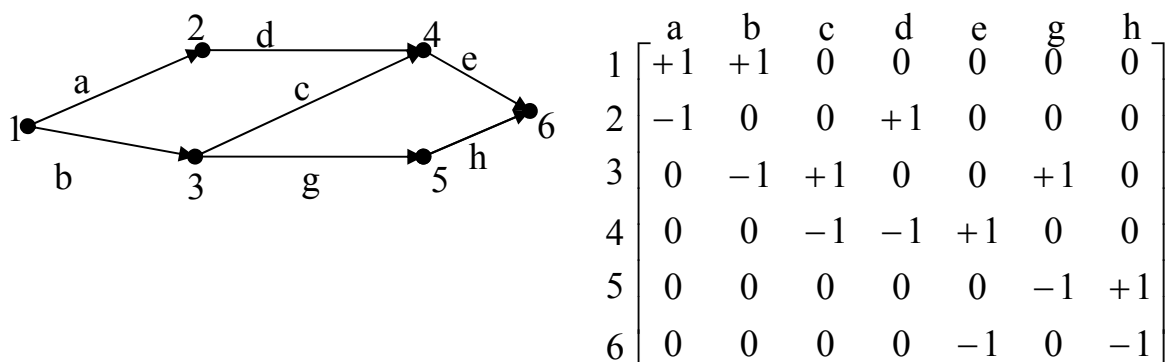


Рис. 12. Граф и матрица инцидентности для маршрутного ТП

Чтобы окончательно определиться с понятием «граф», необходимо освоить ряд определений.

Подграфом G_A графа G называется граф, в который входит лишь часть вершин графа G , образующих множество A вместе с дугами, соединяющими эти вершины (рис. 10, б).

Частичным графом G_A по отношению к графу G называется граф, содержащий только часть дуг графа G (рис. 10, в).

Следует помнить, что при ответе на этот вопрос необходимо давать математическую интерпретацию определений с графическим пояснением.

Помимо дуги, другими важными понятиями являются понятия пути и контура. *Путем* в графе называется такая последовательность дуг, в которой конец каждой предыдущей дуги совпадает с началом следующей. Путь может быть конечным и бесконечным. *Путь*, в котором никакая дуга не встречается дважды, называется *простым* (рис. 10, г). *Путь*, в котором никакая вершина не встречается дважды, называется *элементарным* (рис. 10, д). *Контур* – это конечный путь,

у которого начальная вершина совпадает с конечной $((c, e), (e, d), (d, c))$ на рис. 10, а). *Контур* называется *элементарным*, если все его вершины различны (за исключением начальной и конечной, которые совпадают). *Контур единичной длины*, образованный дугой, имеющей вид (a, a) , называется *петлей* (см. рис. 10, а).

Иногда граф рассматривают без учета ориентации его дуг.

В этом случае его называют *неориентированным*, и для него понятия «дуга», «путь» и «контур» заменяются понятиями «ребро», «цепь», «цикл». *Ребро* – это отрезок, соединяющий две вершины. *Цепь* – это последовательность ребер, а *циклом* называют конечную цепь, у которой начальная и конечная вершины совпадают [4, 12, 13].

Частным случаем неориентированного графа является *дерево* – конечный связный неориентированный граф, не имеющий циклов (рис. 10, е).

Граф дает удобное геометрическое представление отношений на множестве, поэтому теория графов и теория отношений на множестве взаимно дополняют друг друга. Если для любых двух вершин x и y , удовлетворяющих условию $x \neq y$, существует путь из x в y , то считают, что на графе $G = (X, \Gamma)$ введено отношение порядка. Кроме того, вершины, лежащие на одном контуре, являются эквивалентными, т. е. на графе вводится отношение эквивалентности. Отношение порядка и отношение эквивалентности отражают на графе свойства рефлексивности, транзитивности и антисимметричности.

3.2. Нахождение кратчайшего пути в графе с ребрами единичной длины

В практических приложениях имеет большое значение задача о нахождении кратчайшего пути между двумя вершинами связного неориентированного графа. Каждому ребру такого графа приписано некоторое число $\ell(u) \geq 0$, которое может быть расстоянием между

объектами, временем, стоимостью перевозки груза по этому ребру и др. Иногда приходится иметь дело с графами, ребра которых имеют одинаковую длину, принимаемую за единицу. Вершины такого графа представляют собой состояния некоторой системы, в которой все переходы, делаемые за один шаг, эквивалентны [4, 13].

Общее правило для нахождения кратчайшего пути в графе с ребрами единичной длины состоит в том, что каждой вершине x_i приписывают индекс λ_i , равный длине кратчайшего пути из данной вершины в конечную. Приписывание индексов вершинам производится в следующем порядке (рис. 13).

1. Конечной вершине x_0 приписывают индекс 0.
2. Всем вершинам, из которых идет ребро в конечную вершину, приписывают индекс 1.
3. Всем вершинам, еще не имеющим индексов, из которых идет ребро в вершину с индексом λ_i , приписывают индекс λ_{i+1} . Этот процесс продолжают до тех пор, пока не будет помечена начальная вершина. По окончании разметки индекс у начальной вершины будет равен длине кратчайшего пути. Сам кратчайший путь находят, двигаясь из начальной вершины в направлении убывания индексов.

3.3. Нахождение кратчайшего пути в графе с ребрами произвольной длины

Задача приписывания вершинам графа числовых индексов усложняется, если ребра графа имеют произвольную длину. Усложнение вызвано тем, что в сложном графе путь, проходящий через наименьшее число вершин, зачастую имеет большую длину, чем некоторые обходные пути [4, 13]. Процесс приписывания индексов для такого вида графов заключается в следующем (рис. 14).

1. Каждую вершину x_i помечают индексом λ_i . Первоначально конечной вершине x_0 приписывают индекс $\lambda_0 = 0$. Для остальных вершин предварительно полагают $\lambda_i = \infty$ ($i \neq 0$).

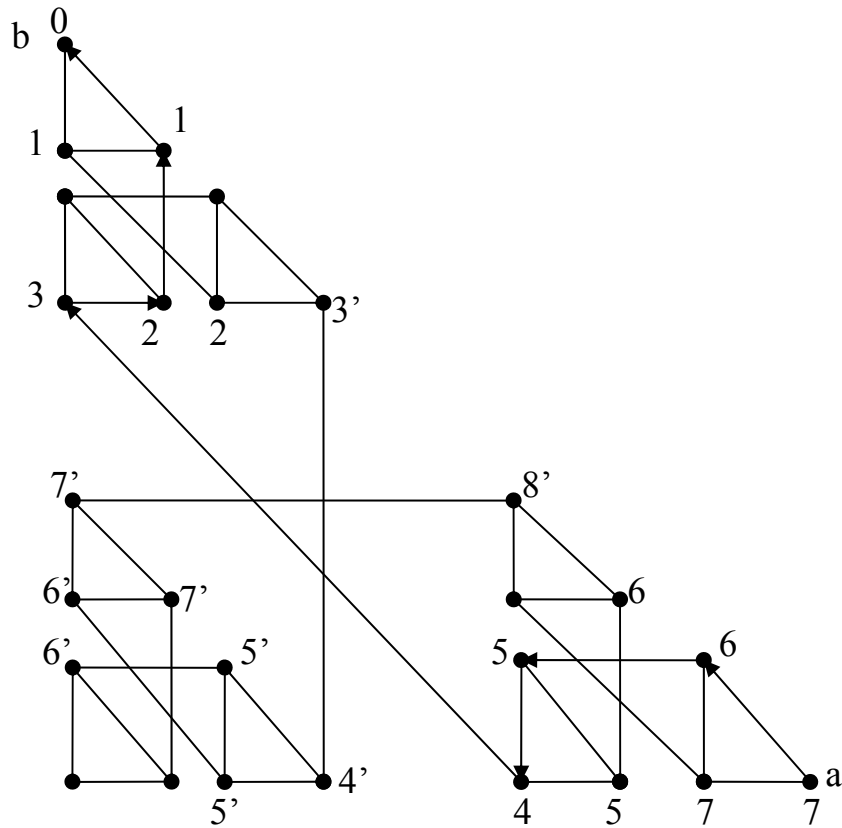


Рис. 13. Нахождение кратчайшего пути в графе с ребрами единичной длины

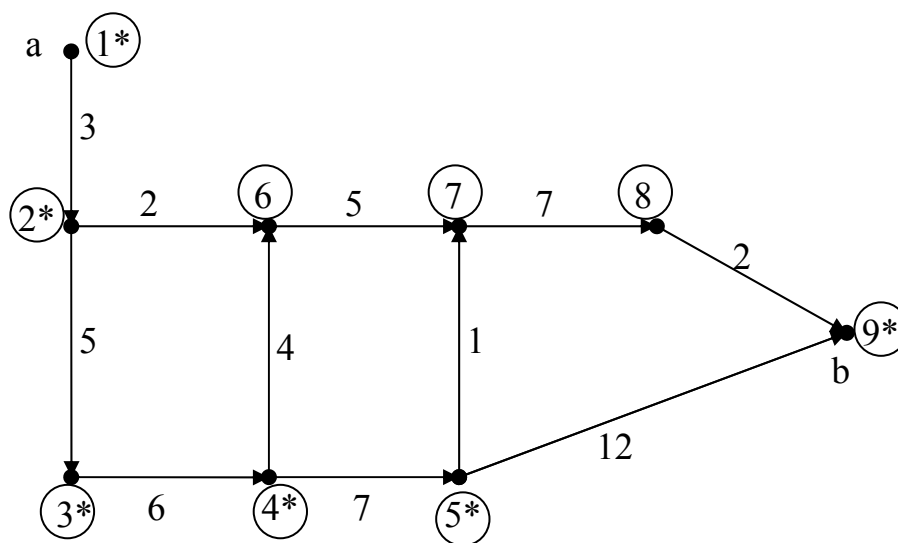


Рис. 14. Нахождение кратчайшего пути в графе с ребрами произвольной длины

2. Находят такую дугу (x_i, x_j) , для которой $\lambda_j - \lambda_i > \ell(x_i, x_j)$, и заменяют индекс λ_j индексом $\lambda'_j = \lambda_i + \ell(x_i, x_j) < \lambda_j$. Продолжают этот процесс замены индексов до тех пор, пока остается хотя бы одна дуга, для которой можно уменьшить λ_j .

Большое практическое значение имеет задача о построении графа наименьшей длины (например, минимизация расстояния, проходимого тележкой с заготовками, или общей длины автомобильных дорог, соединяющих населенные пункты, и др.). Граф соединения n вершин всегда является деревом. Следовательно, для соединения n вершин нужно построить $(n - 1)$ ребер.

Граф наименьшей длины можно построить по следующему правилу: прежде всего соединяют две вершины с наиболее коротким соединяющим ребром u_1 . На каждом из следующих шагов добавляют самое короткое из ребер u_i , при присоединении которого к уже имеющимся ребрам не образуется цикл. Если имеется несколько ребер одинаковой длины, выбирают любое из них. Каждое дерево, построенное таким образом, называют *экономическим*, и длина его равна сумме длин отдельных ребер.

3.4. Контрольные вопросы

1. Какую вершину (поверхность заготовки) и почему можно использовать в качестве корня при построении производного дерева?
2. Как проверяют правильность построения производного и исходного деревьев?
3. Для чего составляют размерную схему технологического процесса?
4. В какой последовательности производят выявление и расчет технологических размерных цепей?

5. На что указывают разрывы и замкнутые контуры в производном или исходном деревьях?

6. По какой схеме определяют предельные отклонения размера припуска?

7. Что такое дуга, путь, контур? В чем их отличие от ребра, цепи, цикла?

8. Что такое дерево? (Привести пример).

9. По каким правилам определяют по графу знаки составляющих звеньев технологических размерных цепей? (Привести пример).

10. Из каких условий определяют минимальный припуск на обработку?

Тема №4. Оптимизация производственных и технологических систем

4.1. Основные определения

В этой теме рассматриваются основы оптимизации производственных и технологических систем. *Системой* называют любой объект, существующий во времени, подвергающийся внутренним или внешним воздействиям, реагирующий на них изменением своих состояний и обладающий способностью проявлять в том или ином виде эти реакции [12, 13].

Таким образом, система определена, если заданы:

а) множество T моментов времени t , множество B допустимых воздействий b , множество Q возможных состояний q , множество R ожидаемых реакций r ;

б) переходная функция, представленная состояниями $q \in Q$, в которых оказывается система в момент времени $t \in T$, если в начальный момент $t_0 \in T$ она была в состоянии $q_0 \in Q$ и на нее действовало возмущение $b_0 \in B$;

в) отношение, связывающее в каждый момент времени $t \in T$ реакции $r \in R$ с состоянием $q \in Q$.

Проектирование и эксплуатация систем представляет собой последовательную цепь операций, исследование которых позволяет создать систему, отвечающую требованиям технического задания, имеющую хорошие производственно-экономические показатели, удобную в эксплуатации и в обслуживании. Следовательно, необходимо выделить главные стороны будущей деятельности системы, вводя соответствующие критерии эффективности. В связи с этим основной задачей исследования производственных систем и технологических процессов является задача поиска в рамках принятой модели

таких решений, которым отвечают экстремальные значения критерия эффективности [8].

Таким образом, внимание исследователя систем концентрируется на критерий K и проблеме его увеличения или уменьшения (по замыслу задачи). Критерий становится эквивалентом цели проектирования системы в заданной модели, а совокупность условий, обеспечивающих достижение экстремальных (или почти экстремальных) значений K , определяет оптимальные (или рациональные) стратегии оперирующей стороны.

Следовательно, задача проектирования производственных и технологических систем [8, 13, 15] связана с необходимостью поиска оптимальных решений, т. е. необходимостью их оптимизации.

Оптимизация – это: 1) процесс нахождения экстремума функции, т. е. выбор наилучшего варианта из множества возможных; 2) процесс приведения системы в наилучшее (оптимальное) состояние.

Иначе говоря, первое определение трактует оптимизацию как факт принятия оптимального решения. Мы выясняем, какое состояние изучаемой системы будет наилучшим с точки зрения предъявленных к ней требований (критерий оптимальности) и рассматриваем такое состояние как цель.

Второе определение имеет в виду процесс выполнения этого решения, т. е. перевод системы от существующего к искомому оптимальному состоянию.

4.2. Математическая постановка задачи оптимизации

Постановка задачи оптимизации содержит множество допустимых решений X и числовую функцию f , определенную на множестве X , называемую целевой функцией (а также критерием оптимальности

или критерием качества). Задача оптимизации заключается в выборе среди элементов множества X такого решения, которое было бы с определенной точки зрения наиболее предпочтительным. Сравнение решений по предпочтительности осуществляется с помощью целевой функции по двум вариантам сравнения произвольной пары решений.

В теории оптимизации рассматривают два вида оптимума: локальный и глобальный. Точка $x_0 \in X$ доставляет функции f на множестве X локальный минимум, если существует такая окрестность U точки x_0 , что неравенство $f(x_0) < f(x)$ справедливо для всех $x \in U$ (рис. 15, а). Глобальный минимум функции f доставляет точка $x_0 \in X$, для которой неравенство $f(x_0) < f(x)$ выполняется для всех $x \in X$ (рис. 15, б). Аналогично определяются точки локального и глобального максимума [8, 15].

В теории оптимизации иногда удобно рассматривать более общую задачу оптимизации, в которой понятие решения определяется таким образом, что оно всегда существует. Для того чтобы сформулировать эту обобщенную задачу, необходимо дать определение точной нижней грани и точной верхней грани.

В обобщенной задаче оптимизации под решением понимают не отдельную точку, а последовательность точек $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $x_k \in X$, такую, что $\lim f(x_k) = f_0$. Эта последовательность всегда существует и называется *минимизирующей последовательностью*.

Как указано выше, решить задачу оптимизации означает найти оптимальную точку x_0 и оптимальное значение $f(x_0)$. Если найдена оптимальная точка, то определение оптимального значения не составляет труда.

Согласно существующей классификации все задачи оптимизации можно разделить на задачи минимизации и максимизации с ограничениями и без ограничений, математического, выпуклого и геометрического программирования. Основными задачами являются задачи

минимизации и максимизации, причем задачи одного класса довольно легко сводятся к задачам другого.

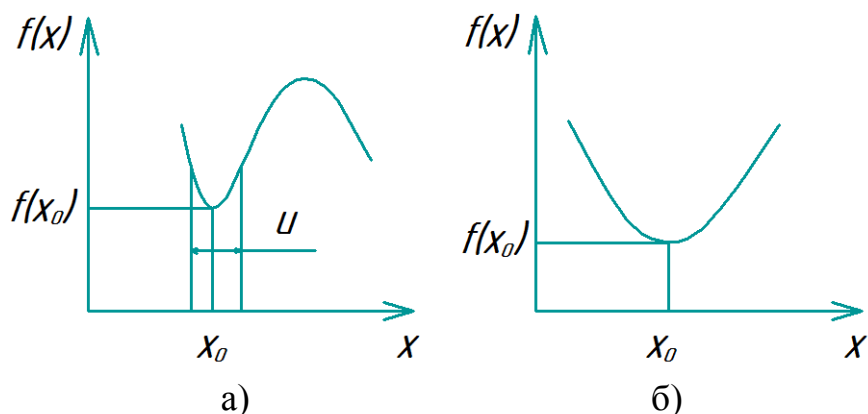


Рис. 15. Минимумы функции: локальный (а); глобальный (б)

4.3. Контрольные вопросы

1. Что такое система?
2. Что такое переходная функция?
3. Что является основной задачей исследования производственных систем и технологических процессов?
4. Что представляет собой проектирование и эксплуатация систем?
5. Дайте определение оптимизации.
6. С помощью чего осуществляется сравнение решений по предпочтительности?
7. Назовите два вида оптимума, которые рассматривают в теории оптимизации.
8. Что такое минимизирующая последовательность?
9. Что означает «решить задачу оптимизации»?
10. Что такое локальный и глобальный минимумы?

Тема №5. Линейное программирование

5.1. Основная задача линейного программирования

Линейное программирование – область математического программирования, посвященная теории и методам решения экстремальных задач, характеризующихся линейной зависимостью между переменными [5, 13, 14].

Линейное программирование возникло в связи с необходимостью решения задач нахождения наивыгоднейших вариантов при решении различных производственных задач. В этих задачах имеется большая свобода изменения различных параметров и ряд ограничивающих условий. Требуется найти такие значения параметров, которые (с определенной точки зрения) были бы наилучшими. К таким задачам относятся задачи нахождения наиболее рационального способа использования сырья и материалов, определения наивыгоднейших режимов выполнения технологических процессов (ТП), повышения эффективности работы межцехового и внутрицехового транспорта и других показателей и критериев.

В самом общем виде задачу линейного программирования можно записать следующим образом [5, 14]. Даны ограничения типа:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, m_1}); \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i \quad (i = \overline{m_1 + 1, m_2}); \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \geq b_i \quad (i = \overline{m_2 + 1, m}). \end{array} \right.$$

Или в так называемой канонической форме, к которой можно привести все три указанных случая:

[illegible]

Требуется найти такие неотрицательные числа x_j ($j = \overline{1, n}$), кото-

рые минимизируют целевую функцию $q = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \rightarrow \min$,

часто называемую линейной формой. Если необходимо максимизировать целевую функцию (например, обеспечить максимальную прибыль при производстве продукции), то ее обозначают q' .

Неотрицательность искомых чисел записывают в виде

$$x_j \geq 0.$$

Характерной особенностью данной задачи является то, что число уравнений меньше числа неизвестных, т. е. $m < n$.

Суть задачи линейного программирования состоит в том, чтобы из множества допустимых решений системы выбрать только одно, которое обращает в минимум линейную форму (целевую функцию). При этом *допустимым решением* называют любое решение системы с неотрицательными значениями переменных ($x_j \geq 0$).

Чаще всего в задаче линейного программирования все или некоторые из уравнений имеют вид неравенства:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, m}).$$

Однако такие неравенства можно легко превратить в уравнения, вводя добавочную переменную x_{n+j} так, чтобы в зависимости от знака неравенства имело место одно из двух выражений:

$$\begin{aligned} a_{ij} \cdot x_j + \dots + a_{in} \cdot x_n + x_{n+j} &= b_i; \\ a_{ij} \cdot x_j + \dots + a_{in} \cdot x_n - x_{n+j} &= b_i. \end{aligned}$$

Решение системы уравнений, в которой число переменных n больше числа уравнений m , можно найти, если $(n - m)$ каких-либо переменных положить равными нулю. Тогда полученную при этом систему m уравнений с m неизвестными можно решить обычными методами алгебры. Найденное при этом решение называют *базисным*. *Базисом* называют любой набор переменных m , таких, что определитель, составленный из коэффициентов при этих переменных, не равен нулю.

Эти m переменных называют *базисными переменными*. Остальные $(n - m)$ переменных называют *свободными переменными*. Если принять все свободные переменные равными нулю и решить полученную систему m уравнений с n неизвестными, то получим базисное решение. Однако среди базисных решений будут такие, которые дадут отрицательные значения некоторых базисных переменных, что противоречит условию задачи, поэтому такие решения *недопустимы*. Кроме того, при нахождении минимального (максимального) значения целевой функции необходимо из допустимых базисных решений выбрать такое, которое обращает функцию в минимум (максимум).

Таким образом, мы посмотрели постановку общей задачи математического программирования с той оговоркой, что как ограничения, так и целевая функция – линейные. Слово «программирование» объясняется здесь тем, что неизвестные переменные, которые отыскиваются в процессе решения задачи, обычно в совокупности определяют программу (план) работы некоторого объекта. Слово «линейное» отражает факт линейной зависимости между переменными. При этом, как указано, задача обязательно имеет экстремальный характер, т. е. состоит в отыскании экстремума (максимума или минимума) целевой функции.

В настоящее время разработаны рациональные способы перебора базисных решений, которые позволяют рассматривать не все

допустимые базисные решения, а их минимальное число. Наиболее распространенными методами такого перебора являются так называемый симплекс-метод и табличный метод.

5.2. Симплекс-метод решения задачи линейного программирования

Суть симплекс-метода состоит в следующем [4, 14]:

1. Находят какое-либо допустимое базисное решение. Его можно найти, приняв какие-либо $(n - m)$ переменные за свободные, приравняв их к нулю и решив получившуюся систему уравнений. Если при этом некоторые из базисных переменных окажутся отрицательными, то нужно выбрать другие свободные переменные, т. е. перейти к новому базису.

2. Проверяют, не достигнут ли уже максимум целевой функции при найденном допустимом базисном решении.

3. Если оптимальное решение не найдено, то ищут новое допустимое базисное решение, но не любое, а такое, которое увеличивает значение целевой функции.

Проверку того, достигнут ли при найденном допустимом решении максимум целевой функции, можно сделать путем поиска нового базисного решения. Для перехода к новому базисному решению одну из свободных переменных следует сделать базисной, при этом она станет отличной от нуля, т. е. возрастет. Следовательно, если какая-либо из свободных переменных входит в выражение для целевой функции со знаком «+» и при ее увеличении целевая функция увеличивается, то максимум целевой функции не достигнут, и данную переменную следует превратить в базисную, сделав ее отличной от нуля. Однако при возрастании свободной переменной некоторые из базисных переменных будут уменьшаться. Поскольку отрицательные

значения переменных недопустимы, то в качестве новой свободной переменной следует принять ту из базисных переменных, которая раньше других обращается в ноль. Затем процедура повторяется до тех пор, пока не будет найдено допустимое базисное решение, обеспечивающее экстремальное значение целевой функции.

5.3. Табличный метод нахождения оптимального решения задачи линейного программирования

При пользовании табличным методом [4, 14] удобно ввести специальную форму записи уравнений и целевой функции. Обозначим через $x'_i (i = \overline{1, m})$ базисные переменные, а через $x''_j (j = \overline{1, n-m})$ свободные переменные. Выразив целевую функцию и базисные переменные через свободные переменные, сформулируем задачу линейного программирования в следующем виде: максимизировать

$$q' = -q = a_{00} - \sum_{j=1}^{n-m} c_j \cdot x''_j$$

$$\text{при условии } x'_i = a_{i0} - \sum_{j=1}^{n-m} a_{ij} \cdot x''_j \quad (i = \overline{1, m}; x'_i \geq 0; x''_j \geq 0)$$

При такой форме записи задача может быть представлена матрицей коэффициентов при свободных переменных, представленной в табл. 2.

По виду коэффициентов матрицы (см. табл. 2) легко судить, является ли найденное базисное решение допустимым и, если оно допустимо, то будет ли оно оптимальным.

Таблица 2

Матрица коэффициентов при свободных переменных

	0	$-x_1''$	$-x_2''$	...	$-x_{n-m}''$
q'	a_{00}	a_{01}	a_{02}	...	$a_{0(n-m)}$
x_1'	a_{10}	a_{11}	a_{12}	...	$a_{1(n-m)}$
...	...	...	...	...	...
x_m'	a_{m0}	a_{m1}	a_{m2}	...	$a_{m(n-m)}$

Действительно, замечая, что столбец коэффициентов a_{i0} ($i \neq 0$) представляет собой базисное решение, соответствующее базису $x_1', \dots, x_m'$, а строчка коэффициентов a_{0j} ($j \neq 0$) представляет собой взятые с обратным знаком коэффициенты при свободных переменных, приходим к выводу, что базисное решение, соответствующее базису $x_1', \dots, x_m'$, допустимо, если $a_{i0} \geq 0$. Если, кроме того, $a_{0j} \geq 0$, то это базисное решение является оптимальным. Очевидно также, что при оптимальном базисном решении коэффициент a_{00} дает значение $q'_{\max}$.

Следовательно, решение задачи линейного программирования табличным методом заключается в нахождении на первом этапе какого-либо допустимого базисного решения, которое в общем случае не является оптимальным, и преобразовании первоначальной матрицы коэффициентов с целью перехода к лучшему базисному решению.

Для более полного представления о задаче линейного программирования полезно дать ее геометрическую интерпретацию. Проводят геометрическое построение прямых или плоскостей (в зависимости от числа уравнений и неизвестных), соответствующих каждому уравнению системы, вершины образовавшейся фигуры будут соответствовать набору допустимых базисных решений.

5.4. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования

Для того чтобы получить более полное представление о задаче линейного программирования, дадим геометрическую интерпретацию следующей задачи на конкретном примере [4].

Имеется система уравнений

$$\left. \begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 &= 5 \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

и целевая функция $q = x_2 - x_1 \rightarrow \min$ (2)

Требуется найти неотрицательные значения переменных, удовлетворяющих уравнениям (1) и обращающих в минимум целевую функцию (2). Нам будет удобней дать правила решения задачи линейного программирования для случая максимизации целевой функции, что легко сделать, взяв в качестве целевой функции выражение $q' = -q = x_1 - x_2$ (2')

В данном примере число уравнений $m = 3$, а число неизвестных $n = 5$, так что имеется $m = 3$ базисных переменных и $n - m = 2$ свободных переменных. То, что свободных переменных только две, дает возможность проиллюстрировать решение задачи геометрически в двумерном пространстве, т. е. на плоскости.

Систему трех уравнений (1) разрешим относительно трех переменных, например, x_3 , x_4 и x_5 , выразив их через x_1 и x_2 . При этом получим :

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= 2 + 2x_1 - x_2 \\ x_4 &= 2 + 2x_2 - x_1 \\ x_5 &= 5 - x_1 - x_2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

По условию задачи линейного программирования переменные могут принимать только неотрицательные значения, т. е. областью допустимых значений переменных будет область, определяемая условиями

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (4)$$

Каждое неравенство (4) определяет некоторую полуплоскость на плоскости (x_1, x_2) . Так неравенство $x_2 \geq 0$ определяет верхнюю полуплоскость, а неравенство $x_3 \geq 0$ определяет полуплоскость, лежащую по одну сторону от прямой $2 + 2x_1 - x_2 = 0$, а именно ту, которая содержит начало координат, что легко проверить, подставив в первое уравнение системы (3) координаты точки $(0, 0)$.

Подобное построение для всех x_i приведены на рис.16. На этом рисунке прямые, соответствующие условию $x_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), отмечены цифрой i . Запрещенные области, соответствующие $x_i < 0$, отмечены штриховкой. Как видно из рис.16 допустимой областью значений переменных x_1 и x_2 является затемненная область, представляющая собой многоугольник *avcdo*. Важно отметить, что многоугольник допустимых решений является выпуклым, так как представляет собой пересечение выпуклых областей, определяемых условиями $x_i > 0$.

Приведенное построение позволяет дать геометрическую интерпретацию базисному решению. Так как каждая прямая на рис.16 соответствует обращению в нуль одной из переменных, то в точках пересечения двух прямых будут обращаться в нуль две, т. е. $n - m$ переменных. Но $n - m$ есть число свободных переменных, обращение которых в нуль соответствует базисному решению.

Среди базисных решений имеются такие, которые не принадлежат области допустимых решений. Это недопустимые решения. Области допустимых решений принадлежат только те точки пересечения прямых $x_i = 0$, которые являются вершинами многоугольника

допустимых решений. Следовательно, вершины многоугольника допустимых решений соответствуют допустимым базисным решениям.

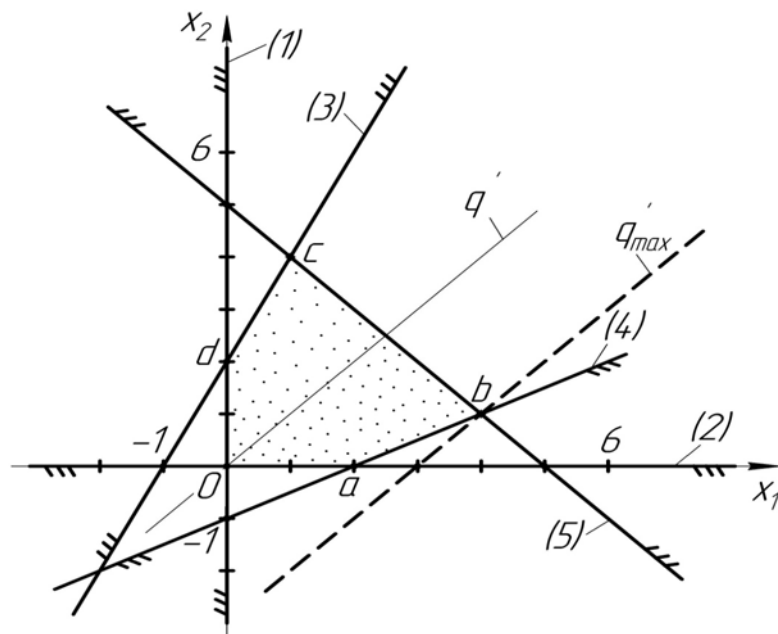


Рис. 16. Многоугольник допустимых решений задачи

Рассмотрим теперь обращение в максимум целевой функции (2'). Геометрически при любом q' выражение (2') определяет прямую, проведенную под углом 45° к оси абсцисс, причем увеличению q' соответствует перемещение прямой в направлении стрелки, показанной на рис.16. Эта прямая будет совместна с допустимым решением задачи только в том случае, если она имеет общие точки с областью допустимых решений. Максимальное значение q' получится при крайнем положении прямой, когда она обращается в опорную прямую к области допустимых решений (пунктир на рис.16). Однако опорная прямая к выпуклому многоугольнику обязательно проходит хотя бы через одну из его вершин, которые, как мы видели, соответствуют допустимым базисным решениям.

Таким образом, мы приходим к очень важному выводу, что решение задачи линейного программирования, обращающее в максимум целевую функцию q' , обязательно лежит среди допустимых базисных решений.

Этот вывод легко обобщается на случай произвольных m и n , когда $n - m > 2$. В этом случае $x_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$) определяют полупространства в многомерном пространстве, пересечение которых определит область допустимых решений в виде выпуклого многоугольника. Вершины этого многоугольника будут соответствовать допустимым базисным решениям. Выражение для целевой функции определяет гиперплоскость в рассматриваемом многомерном пространстве, которая при условии $q' = \max$ будет опорной к многограннику допустимых решений, т. е. будет обязательно проходить хотя бы через одну из его вершин. Таким образом, и в этом случае решение задачи линейного программирования будет находиться среди допустимых базисных решений.

Полученный вывод позволяет наметить путь решения задачи линейного программирования. Поскольку решение должно находиться среди допустимых базисных решений, число которых конечно, то можно найти все допустимые базисные решения и для каждого из них вычислить значение q' . Окончательным решением явится то из найденных решений, для которого значение q' будет максимально.

5.5. Контрольные вопросы

1. Приведите запись задачи линейного программирования в стандартной форме.
2. В чем заключается суть задачи линейного программирования?
3. Что такое «базисная» и «свободная» переменные?
4. Перечислите основные этапы решения задачи линейного программирования симплекс-методом.

5. По каким критериям судят о допустимости и оптимальности решения задачи линейного программирования симплекс-методом?

6. По каким критериям выбирают базисную переменную для перевода ее в свободную при решении задачи симплекс-методом?

7. Приведите форму представления задачи линейного программирования при ее решении табличным методом.

8. По каким критериям выбирают базисную переменную для перевода ее в свободную при решении задачи табличным методом?

9. Перечислите основные правила заполнения таблиц при решении задачи линейного программирования табличным методом.

10. Как определяется генеральный коэффициент при решении задачи линейного программирования табличным методом?

Тема №6. Применение теории расписаний для краткосрочного планирования работы гибких производственных систем (ГПС)

6.1. Задачи, решаемые теорией расписаний

Задача краткосрочного планирования (КП) работы гибкой производственной системы (ГПС) относится к классу комбинаторных задач полного упорядочения во времени различных дискретных процессов, предварительно частично упорядоченных во времени согласно технологическим маршрутам [9, 10, 13, 14].

Классической формулировкой задачи КП считается следующая: необходимо изготовить L различных деталей, которые должны быть обработаны на K станках при заданных временах обработки на каждом станке t_{lk} ($l = \overline{1, L}$; $k = \overline{1, K}$). Требуется определить порядок запуска заготовок на станки так, чтобы общее время, необходимое для выпуска всех деталей, было минимальным.

В общем случае задача КП может быть сведена к задачам целочисленного программирования, но их решение связано с большими трудностями из-за отсутствия эффективных алгоритмов их решения. Более удачным выглядит применение для этих целей методов теории расписаний: метода «ветвей и границ», эвристических методов решения. Использование теории расписаний для планирования работы ГПС позволяет значительно упростить алгоритмы составления оптимальных расписаний и сократить сроки подготовки производства.

Теория расписаний представляет собой единую научную дисциплину, изучающую распределительные задачи, в которых ограничительным ресурсом является время. Возникновение и последующее развитие теории расписаний характеризовалось попытками изучить широкий круг задач, начиная с простейшей задачи выбора очередности выполнения N работ одним исполнителем и кончая так назы-

ваемой общей задачей, связанной с выбором оптимальной последовательности выполнения заданного набора работ на имеющемся комплекте оборудования.

Однако применительно к задачам краткосрочного планирования загрузки металлорежущих станков методы теории расписаний представляли, в основном, чисто теоретический интерес, что объясняется несколькими причинами:

1. Оптимизация планирования требует оперативной переработки больших объемов информации и проведения трудоемких расчетов и невозможна без применения средств вычислительной техники.

2. Аргументированное составление и последующая четкая реализация краткосрочных планов возможны только при высокой степени формализации технологических процессов, как правило, не достижимой при использовании станков с ручным управлением и традиционных методов организации производства.

3. Гибкое распределение и перераспределение работ между станками предполагает наличие в производственной системе автоматизированной транспортно-складской системы (АТСС), обеспечивающей централизованное хранение и оперативную доставку к рабочим местам заготовок деталей и технологической оснастки.

Таким образом, практический подход к оптимизации краткосрочного планирования требует наличия ряда технических и организационных предпосылок, которые в настоящее время могут быть созданы в полной мере лишь при функционировании ГПС.

В зависимости от целей создания ГПС и сложившейся на момент планирования производственной ситуации в ходе планирования могут решаться самые разнообразные задачи: соблюдение директивно заданных сроков изготовления деталей, изготовление набора деталей за минимальное время, обеспечение комплектного выпуска деталей и т. д. В общем случае расписанием можно назвать документ,

содержащий сведения: о количестве и номенклатуре выполняемых работ; о моментах начала и окончания каждой работы; о затратах времени и материальных ресурсов на все проводимые работы; о месте и технических средствах выполнения каждой работы.

Этих сведений достаточно для формального представления расписаний, хотя на практике они могут дополняться и уточняться в интересах более полного учета той реальности, которая отражена в модели. Расписание можно задавать различными способами, среди которых наиболее наглядным является геометрический, основанный на использовании диаграммы Ганта (или Гантт-карты). Каждой работе ставится в соответствие отрезок определенной длины, каждому типу оборудования – прямая линия (ось времени), вдоль которой размещают отрезки – работы, выполняемые на этом оборудовании. При известном начале отсчета времени $t = 0$ взаимное расположение отрезков дает всю необходимую для планирования работы информацию. На рис. 17 представлено расписание изготовления (диаграмма Ганта) шести разных деталей на двух станках. Время изготовления каждой детали представлено отрезком, равным по длине продолжительности обработки заготовки на данном станке в выбранном масштабе времени. Цифры над отрезками означают номера операций, которые состоят из порядкового номера детали и порядкового номера станка.

Простейшая задача теории расписаний формулируется следующим образом: имеются N работ и единственный исполнитель (станок, технологическая линия т. п.); известны и фиксированные длительности работ $(T_j; j = 1, N)$, задан критерий эффективности K . Требуется найти порядок проведения этих работ, обеспечивающий минимум (или максимум) K .

Поставленную задачу можно решить, в частности, методом полного перебора вариантов загрузки «исполнителя» при любых ограничениях на выбор перестановок работ.

Но- мер ста- нка	Время, мин																									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
1			11				21				31				41		61			51						
2							12				22				32					42				52		62

Рис. 17. Расписание изготовления шести деталей

При решении такой задачи обычно приходится сталкиваться с большим числом исследуемых вариантов, разными способами задания критерия K . Следствием этого является большое разнообразие приемов исследования и допустимость приближенных результатов во многих практических ситуациях.

6.2. Метод «ветвей и границ»

Рассмотрим основные методы теории расписаний на примере задачи о загрузке двух станков. Пусть имеется группа из n различных деталей, заготовки которых последовательно обрабатывают на первом станке, а затем на втором станке. Трудоемкость обработки заготовки j -й детали на первом станке обозначим p_j , а на втором – q_j (предполагается, что объемы подготовительно-заключительных работ не зависят от последовательности обработки заготовок на каждом станке). Требуется составить расписание обработки, минимизирующее общее время изготовления всей группы деталей.

Обозначим через $t_{j1}(A)$ и $t_{j2}(A)$ соответственно время окончания обработки j -й детали на первом и втором станках при использовании некоторого расписания A . Поскольку каждая деталь изготавливается в соответствии с технологическим маршрутом, то $t_{j1}(A) < t_{j2}(A)$ или, точнее, $t_{j1}(A) \leq t_{j2}(A) - q_j$. Равенство достигается в случае, когда к моменту окончания обработки заготовки j -й детали на первом станке второй станок свободен и сразу же начинает обработку заготовки этой детали (здесь и далее время транспортирования заготовок от станка к станку считается пренебрежимо малым). Таким образом, видно, что второй станок заканчивает работу позднее первого, и, следовательно, критерий оптимальности можно записать в виде

$$K = \min_A \{ \max \{ t_{j2} \} \},$$

где $\max \{ t_{j2} \}$ находится по всем деталям в одном расписании A (т. е. выбирается деталь, изготавливаемая по расписанию A последней), а минимум – по всем возможным расписаниям.

Рассмотрим для примера изготовление группы из четырех деталей на ГПС, состоящей из двух станков (табл. 3).

Таблица 3

Трудоемкость обработки заготовок

Номер станка	Номер детали			
	1	2	3	4
	Трудоемкость операции, мин			
1	5	8	10	6
2	15	10	8	12

На диаграммах Гантта покажем три расписания (рис. 18).

$A_1 = (11, 41, 21, 31; 22, 12, 42, 32);$

$A_2 = (11, 41, 31, 21; 12, 42, 32, 22);$

$A_3 = (41, 11, 21, 31; 42, 12, 22, 32).$

Из рис. 18 видно, что наиболее велика трудоемкость изготовления группы из четырех деталей на двух станках при реализации расписания A_1 ($t_1 = 64$ мин). При реализации расписания A_2 и расписания A_3 трудоемкость изготовления соответственно равна $t_1 = 50$ мин и $t_1 = 51$ мин.

Можно показать, что в общем случае число вариантов расписаний при изготовлении « n » деталей на двух станках равно $(n!)^2$.

Для рассмотренного примера число вариантов равно $(4!)^2 = 576$. Эти варианты могут быть представлены графически в виде, показанном на рис. 19.

Самым простым методом выбора оптимального расписания является метод полного перебора вариантов [5, 14]. Однако, учитывая большое количество возможных вариантов, этим методом при широкой номенклатуре деталей в условиях средне- и мелкосерийного производства, воспользоваться практически невозможно.

Можно попытаться сократить число анализируемых вариантов, осуществив их целенаправленный отбор по следующему принципу.

1. Варианты не обязательно просматривать до конца. Их можно отсеивать на промежуточных этапах анализа, если удастся доказать, что решение для текущего варианта или группы вариантов будет хуже или, по крайней мере, не лучше найденного. Чем раньше, т. е. чем ближе к корню дерева перебора вариантов (см. рис. 19) проведена такая оценка, тем эффективнее отсев. Проведение оценок качества вариантов без полного их расчета и последующая отбраковка ветвей в дереве перебора вариантов называется методом «ветвей и границ».

2. Часть вариантов можно отсеять заранее, не приступая к их анализу, если, пользуясь общим свойством решения, доказать, что среди оставшихся вариантов сохранился хотя бы один близкий к оптимальному.

Прежде всего найдем границу оптимального решения.

Вариант расписания	Номер станка	Время, мин												
		5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
A ₁	1	11	41	21		31								
	2					22		12			42		32	
A ₂	1	11	41		31	21								
	2			12		42		32	22					
A ₃	1	41	11	21		31								
	2		42			12		22		32				

Рис. 18. Расписание изготовления четырех деталей

Суммарная трудоемкость обработки заготовок четырех деталей на втором станке составляет 45 мин, причем второй станок может начать работу не ранее чем через 5 минут после начала работы первого станка (если обработка начнется с заготовки первой детали). Следовательно, $\max \{t_{j2}\} > 50$ мин. Если в ходе просмотра дерева перебора будет найдено расписание изготовления всего комплекта деталей за 50 мин, то решение можно закончить, так как оно будет оптимальным.

Предположим, что уже были пересмотрены все расписания класса $(1, \kappa, l, m; s, v, u, w)$ и найдено лучшее среди них расписание $(1, 4, 3, 2; 1, 4, 3, 2)$, обеспечивающее изготовление деталей за 50 мин. Приступая к анализу расписаний класса $(2, \kappa, l, m; s, v, u, w)$, заметим,

что эти расписания не могут дать значение целевой функции меньше 53 мин, так как второй станок начнет работу только через 8 мин после начала работы первого станка. Следовательно, расписание класса $(2, \kappa, l, m; s, v, u, w)$ рассматривать бесперспективно, и ветвь перебора, идущая из корня в вершину 2, может быть отсечена; аналогичные оценки могут быть сделаны и при анализе расписаний классов $(3, \kappa, l, m; s, v, u, w)$ и $(4, \kappa, l, m; s, v, u, w)$.

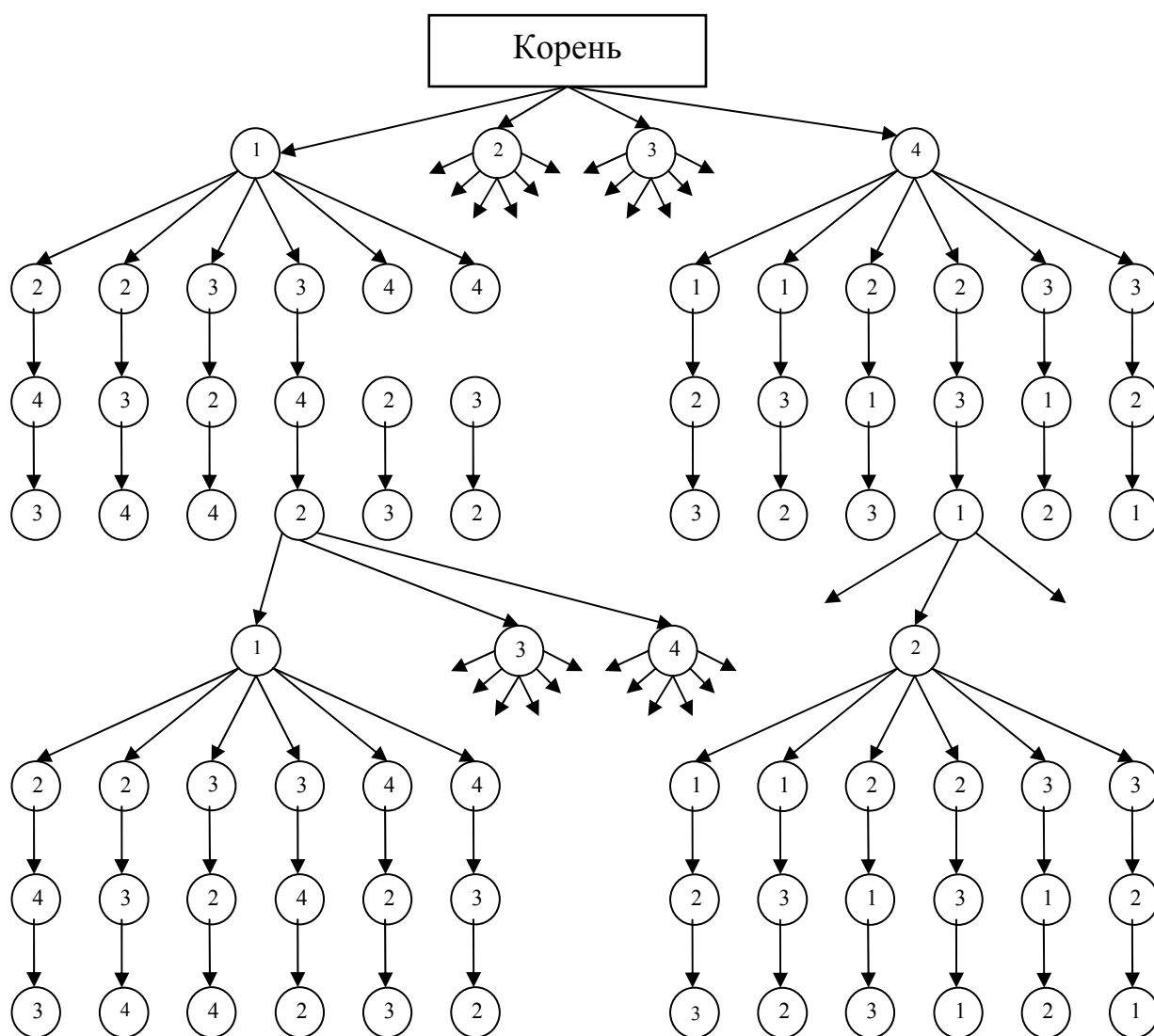


Рис. 19. Дерево перебора вариантов: 1 – 4 – номера деталей

Более важное значение для сокращения трудоемкости перебора вариантов имеет исследование общих свойств оптимального решения. Например, в рассмотренной выше задаче расписание класса $(j, k, l, m; s, k, l, m)$ при $j \neq s$ заведомо не будет оптимальным, поскольку второй станок будет простаивать, несмотря на наличие работы.

Анализируя рис. 19, нетрудно убедиться в том, что расписания класса $(j, k, l, m; j, k, l, m)$ с одинаковыми последовательностями обработки заготовок на обоих станках будут всегда не хуже любых расписаний класса $(j, k, l, m; s, v, u, w)$, в которых последовательность обработки различна. Использование расписаний с одинаковыми последовательностями обработки на первом и втором станках позволяет сократить количество анализируемых вариантов с $(n!)^2$ до $n!$. Однако при большом n число анализируемых вариантов остается настолько значительным, что не поддается полному перебору.

Анализ вариантов расписаний показывает, что в оптимальном расписании необходимо как-то совместить два требования. С одной стороны, в начало расписания желательно включить заготовки деталей с минимальным временем обработки на первом станке p_j для того, чтобы максимально быстрее загрузить работой второй станок. С другой стороны, для сокращения простоев второго станка целесообразно загружать его в первую очередь заготовками с максимальным временем обработки q_j . Второе требование оправдано и потому, что при его соблюдении в конец расписания будут отнесены детали (заготовки) с минимальным значением q_j , а это в некоторой степени сокращает время работы второго станка после завершения работ первым станком.

Учитывая оба вышеуказанных требования, можно представить последовательность составления оптимального расписания работы двух станков в следующем виде:

1. Разбить комплект деталей на две группы: в первую группу включить детали, для которых $p_j \leq q_j$, во вторую – детали, для которых $p_j > q_j$.

2. Включить в расписание работы первого станка заготовки деталей первой группы, предварительно упорядочив их по возрастанию p_j .

3. Включить в расписание работы первого станка заготовки деталей второй группы, предварительно упорядочив их по убыванию q_j .

4. Сохранить на втором станке ту же последовательность обработки, что и на первом станке.

6.3. Эвристические решающие правила

При составлении расписания работы трех и более станков методы, применяемые при составлении расписания работы двух станков, неэффективны. В этом случае для практических целей чаще всего используют так называемые эвристические алгоритмы (решающие правила), которые позволяют построить расписание без полного или частичного перебора вариантов и подбираются и уточняются по опыту эксплуатации производственной системы. Рассмотрим некоторые из этих правил [5, 13, 14].

Правило *«кратчайшей операции»* формулируется в следующем виде: из текущего портфеля работ, подготовленных к выполнению на данном станке, выбирают детали с минимальным временем обработки заготовок на этом станке. В расписании работы второго и последующего станков необходимо включить заготовки, уже обработанные на предыдущих операциях, ранжируя их в порядке увеличения трудоемкости обработки. Правило кратчайшей операции применяют в том случае, когда необходимо как можно быстрее загрузить работой сле-

дующие по технологическому маршруту станки. Окончательный вариант расписания выбирают после построения диаграммы Ганта и стремятся при этом к сокращению общей трудоемкости изготовления всей группы деталей.

Правило *«максимальной остаточной трудоемкости»* формулируется в следующем виде: из текущего портфеля работ, подготовленных к выполнению на станке, выбирают заготовки деталей с максимальной суммой времени обработки на всех еще не пройденных станках, включая данный станок.

Это правило целесообразно использовать для установления последовательности обработки внутри одной группы деталей, если детали, входящие в группу, существенно различаются по трудоемкости изготовления.

Правило *«минимальной остаточной трудоемкости»* формулируется в следующем виде: из текущего портфеля работ, подготовленных к выполнению на данном станке, выбирают заготовки деталей с минимальной суммарной трудоемкостью обработки на всех еще не пройденных станках, включая данный станок. Это правило противоположно предыдущему и предназначено для того, чтобы по возможности быстрее разгрузить ГПС, сократив количество находящихся в производстве наименований деталей и используемых грузоносителей.

Решающие правила не претендуют на нахождение оптимального решения, однако позволяют более полно учесть производственную природу решаемой задачи и как бы формализуют накопленный практический опыт управления.

6.4. Контрольные вопросы

1. Какие технические и организационные условия необходимы для оптимизации краткосрочного планирования?
2. Какие задачи могут решать в ходе краткосрочного планирования?
3. Что называется расписанием?
4. Что такое диаграмма Ганта?
5. В чем заключается суть метода «ветвей и границ»?
6. Какова последовательность составления оптимального расписания работы двух станков?
7. Перечислите основные эвристические алгоритмы.
8. В чем заключается правило «кратчайшей операции»?
9. В чем суть правила «максимальной остаточной трудоемкости»?
10. В каких случаях пользуются правилом «минимальной остаточной трудоемкости» и в чем его суть?

ЗАДАНИЯ И ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Практическое занятие №1.

Решение задачи линейного программирования симплекс-методом

1.1. Пример решения

Прежде чем приступить к выполнению практического занятия, рассмотрим последовательность решения задачи на конкретном примере [14].

Требуется максимизировать функцию прибыли от производства четырех продуктов $q' = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4$, если затраты ресурсов на их изготовление заданы следующими ограничениями:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 16; \\4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 &\leq 100; \\6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 &\leq 110.\end{aligned}$$

Математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} q' = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \rightarrow \max; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 16; \\ 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 \leq 100; \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 110; \\ x_i \geq 0 (i = \overline{1,4}). \end{array} \right. \quad (5)$$

Рассмотрим решение данной задачи с помощью симплекс-метода.

Введем дополнительные переменные x_5, x_6, x_7 , с помощью которых перейдем от неравенств к уравнениям.

Тогда ограничения можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 16; \\ 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 + x_6 = 100; \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + x_7 = 110. \end{cases} \quad (6)$$

Очевидно, что дополнительные переменные x_{n+i} (x_5, x_6, x_7), которые равны разности между располагаемым ресурсом и требуемым, представляют собой резерв по данному ресурсу.

Поскольку $(n - m) = 4$, то в качестве свободных переменных можно взять любые, например, x_1, x_2, x_3, x_4 . Положив их равными нулю, преобразуем уравнения (6).

$$\begin{cases} x_5 = 16 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4; \\ x_6 = 100 - 4x_1 - 6x_2 - 10x_3 - 13x_4; \\ x_7 = 110 - 6x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 3x_4. \end{cases} \quad (7)$$

Получим базисное решение $x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 0; x_4 = 0; x_5 = 16; x_6 = 100; x_7 = 110$, которое является допустимым и при котором

$$q' = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 = 0. \quad (8)$$

В выражение для целевой функции (8) все свободные переменные входят со знаком «+», что свидетельствует о том, что максимум целевой функции не достигнут. Поэтому любую свободную переменную x_1, x_2, x_3, x_4 можно сделать базисной переменной. Обычно на первом шаге решения задачи из всех свободных переменных, входящих в целевую функцию со знаком «+», в качестве новой базисной переменной принимают ту из свободных переменных, которая более других оказывает влияние на целевую функцию (в данном случае – x_4), но мы, с целью некоторого усложнения примера и более полного рассмотрения возможностей симплекс-метода, примем в качестве новой базисной переменной x_1 . Для определения новой свободной переменной выясним, какая из базисных переменных x_5, x_6, x_7 ранее других обратится в ноль при увеличении переменной x_1 .

Из уравнений (7) следует, что при $x_2 = 0$; $x_3 = 0$; $x_4 = 0$ увеличение x_1 приводит к уменьшению x_5 , x_6 , x_7 , так, что при $x_1 = 16$ получим $x_5 = 0$; $x_6 = 36 > 0$; $x_7 = 14 > 0$. Таким образом, переменную x_5 следует сделать новой свободной переменной, так как она быстрее переменных x_6 и x_7 обратится в ноль, что приводит к новому базису.

Для продолжения решения решим систему (7) относительно новых базисных переменных, приведя ее к виду

$$\begin{cases} x_1 = 16 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5; \\ x_6 = 36 - 2x_2 - 6x_3 - 9x_4 + 4x_5; \\ x_7 = 14 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 6x_5. \end{cases} \quad (9)$$

Выразим целевую функцию через новые свободные переменные.

$$q' = 960 + 10x_2 + 60x_3 + 70x_4 - 60x_5. \quad (10)$$

Получим новое базисное решение: $x_1 = 16$; $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$; $x_6 = 36$; $x_7 = 14$. При этом $q' = 960$.

Из уравнения (10) видно, что максимум целевой функции не достигнут, так как переменные x_2 , x_3 , x_4 входят в уравнение (10) со знаком «+». Следовательно, одну из свободных переменных x_2 , x_3 , x_4 , например x_3 , необходимо перевести в базисную переменную, а базисную x_6 – в свободную (она раньше x_1 и x_7 обратится в ноль при увеличении x_3). Новый базис образуют при этом переменные x_1 , x_3 , x_7 .

Решим уравнения (9) относительно новых базисных переменных (см. (11)). При этом целевая функция примет вид (12).

$$\begin{cases} x_1 = 10 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{6}x_6; \\ x_3 = 6 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{3}{2}x_4 + \frac{2}{3}x_5 - \frac{1}{6}x_6; \\ x_7 = 26 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{22}{3}x_5 - \frac{1}{3}x_6. \end{cases} \quad (11)$$

$$q' = 1320 - 10x_2 - 20x_4 - 20x_5 - 10x_6. \quad (12)$$

Из уравнения (12) видно, что при увеличении свободных переменных x_2, x_4, x_5, x_6 значение q' уменьшается. Следовательно, при данном базисе достигается максимум целевой функции, и решением задачи будет следующий набор переменных:

$$x_2 = x_4 = x_5 = x_6 = 0; x_1 = 10; x_3 = 6; x_7 = 26 \text{ при } q' = 1320.$$

1.2. Задание к практическому занятию №1

Предприятие может выпустить три вида продукции: P_1, P_2, P_3 . Для выпуска продукции требуются ресурсы трех видов: трудовые, станочное оборудование и полуфабрикаты. Определить, в каком количестве и какого вида продукции надо выпустить, чтобы прибыль от ее реализации была максимальной. Объемы и нормы расхода ресурсов приведены в условных обозначениях в табл. 4, цифровые значения в соответствии с номером варианта студента даны в табл. 5.

Таблица 4

Данные для постановки задачи

Наименование ресурса	Вид продукции			Объем ресур- са
	П ₁	П ₂	П ₃	
	Расход ресурса на единицу продукции			
Трудовые ресурсы, человеко-час	a_1	a_2	a_3	a
Станочное оборудование, станко-смена	b_1	b_2	b_3	b
Полуфабрикаты, кг	c_1	c_2	c_3	c
Прибыль с единицы продукции, руб.	p_1	p_2	p_3	max
Выпуск, шт.	x_1	x_2	x_3	

Таблица 5

Исходные данные для выполнения практического занятия №1

Но- мер вар.	a_1	a_2	a_3	a	b_1	b_2	b_3	b	c_1	c_2	c_3	c	p_1	p_2	p_3
1	8	5	7	28	6	7	4	48	9	6	5	36	8	7	5
2	15	18	12	42	6	4	4	36	4	5	8	54	12	80	16
3	3	3	2	36	2	4	3	25	6	9	8	18	24	25	18
4	6	8	9	36	1	3	2	24	3	2	3	18	18	12	15
5	2	5	6	24	3	7	7	42	4	4	2	30	12	18	16
6	2	4	2	12	6	5	1	28	7	7	4	30	16	12	18
7	15	8	6	42	12	7	9	12	6	12	10	24	12	18	20
8	10	12	6	20	4	8	14	20	15	8	6	42	20	12	18
9	8	5	2	12	2	4	7	15	4	3	8	18	3	6	7
10	8	5	2	12	7	2	4	18	4	3	9	15	12	16	20
11	2	4	3	18	6	9	8	24	1	3	2	18	12	15	25
12	3	1	2	60	4	3	2	90	9	8	3	15	45	75	60
13	2	2	1	12	2	6	5	42	7	3	7	24	18	16	12
14	3	7	7	42	2	2	1	12	2	4	2	12	20	10	15
15	12	9	7	24	6	12	10	12	8	4	14	20	18	20	12
16	14	12	12	45	10	7	15	24	9	8	8	12	16	20	24
17	12	13	15	25	10	15	12	30	8	7	9	35	12	15	18
18	16	8	12	24	4	1	8	12	6	18	12	18	24	18	30
19	15	25	10	40	10	15	10	35	5	15	15	30	30	20	25
20	4	3	1	60	1	5	2	50	6	2	8	10	10	12	18
21	6	14	16	42	1	20	12	36	4	4	4	16	20	8	16
22	13	12	7	30	1	20	10	35	7	14	15	25	16	24	20
23	9	15	18	27	6	3	9	18	12	15	6	39	24	30	15
24	2	4	4	22	1	1	1	10	6	2	8	18	20	18	16
25	7	9	12	15	5	1	10	20	4	6	8	24	12	16	8
26	6	8	9	36	2	4	2	12	10	15	10	35	10	16	12
27	9	8	8	12	2	4	3	18	6	2	8	10	12	15	20
28	2	4	7	15	6	8	9	36	2	5	6	24	12	24	18
29	4	4	2	30	15	25	10	40	9	8	8	12	10	14	16
30	6	9	8	24	4	3	8	18	6	8	9	36	6	10	20

Практическое занятие №2. Решение задачи линейного программирования табличным методом

2.1. Пример решения

Решение задачи линейного программирования табличным методом заключается в нахождении на первом этапе какого-либо допустимого базисного решения, которое в общем случае не является оптимальным [14], и преобразовании первоначальной матрицы коэффициентов с целью перехода к лучшему базисному решению.

Рассмотрим решение задачи из практического занятия №1 табличным методом. Как уже говорилось (см. тему №5 теоретической части данного пособия), при пользовании табличным методом удобно ввести специальную форму записи уравнений.

Принимая x_1, x_2, x_3, x_4 за свободные переменные, приведем систему уравнений (5) к следующему виду:

$$\begin{cases} q' = 0 - (-60x_1 - 70x_2 - 120x_3 - 130x_4); \\ x_5 = 16 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4); \\ x_6 = 100 - (4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4); \\ x_7 = 110 - (6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4). \end{cases} \quad (13)$$

Матрицу коэффициентов представим в виде табл. 6 с клетками достаточно крупного размера, в верхнем левом углу которых запишем коэффициенты уравнений (13).

Таблица 6

Исходная матрица коэффициентов

	0	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
q'	0	-60	-70	-120	-130
x_5	16	1	1	1	1
x_6	100	4	6	10	13
x_7	110	6	5	4	3

Проверим, не найдено ли уже оптимальное решение, условием которого является $a_{0j} \geq 0$ ($j \neq 0$).

Поскольку a_{0j} (коэффициенты при $-x_1, -x_2, -x_3, -x_4$ в выражении для q') отрицательны, то оптимальное решение не найдено, и переменную, например x_1 , следует сделать базисной.

Создадим новую таблицу (табл. 7) с клетками достаточно крупного размера, в верхнем левом углу которых запишем коэффициенты уравнений (13).

Выделим столбец (табл. 7), соответствующий переменной x_1 , сдвоенными линиями. Определим, какую из базисных переменных следует сделать свободной. Очевидно, ту, которая быстрее обратится в ноль при увеличении x_1 . Это будет базисная переменная x_i , для которой коэффициент в отмеченном столбце $a_{i1} > 0$, а отношение a_{i0}/a_{i1} — наименьшее. Такой переменной является базисная переменная x_5 , у которой $a_{50} = 16$ и $a_{51} = 1$. Строку, соответствующую базисной переменной x_5 , также отметим двойными линиями (см. табл. 7).

Таблица 7

Матрица коэффициентов для перехода к новому базису

	0	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
q'	0 960	-60 60	-70 60	-120 60	-130 60
x_5	16 16	1 1	1 1	1 1	1 1
x_6	100 -64	4 -4	6 -4	10 -4	13 -4
x_7	110 -96	6 -6	5 -6	4 -6	3 -6

Коэффициент $\lambda = a_{51}$, стоящий в верхнем левом углу клетки табл. 7 на пересечении отмеченных строки и столбца, называется *генеральным коэффициентом*. В нашем случае $\lambda = 1$ (взят в рамку).

Теперь следует заполнить нижние правые углы табл. 7 по следующим правилам [4, 14]:

1) в клетку на пересечении отмеченных строки и столбца записывают $1/\lambda$;

2) в остальных клетках отмеченной строки записывают верхние коэффициенты, умноженные на $1/\lambda$ (верхние коэффициенты, за исключением генерального, выделяют жирным шрифтом);

3) в остальных клетках отмеченного столбца записывают верхние коэффициенты, умноженные на $(-1/\lambda)$ (нижние коэффициенты, за исключением генерального, выделяют жирным шрифтом);

4) в остальных клетках записывают произведения выделенных жирным шрифтом коэффициентов, на пересечении которых стоит данная клетка.

Затем переходят к заполнению верхних левых углов табл. 8, которая отличается от табл. 7 тем, что отмеченная свободная переменная x_1 стала базисной, а отмеченная базисная переменная x_5 — свободной.

Верхние левые углы клеток табл. 8 заполняют по следующим правилам:

1) строку и столбец, соответствующие новым свободной и базисной переменным, заполняют нижними коэффициентами отмеченных строки и столбца табл. 7;

2) в остальные клетки записывают суммы коэффициентов, стоящих в соответствующих клетках табл. 7.

Заполненная табл. 8 соответствует матрице коэффициентов при новом базисе x_1, x_6, x_7 . Поскольку в табл. 8 коэффициенты $a_{02} < 0$, $a_{03} < 0$ и $a_{04} < 0$, то оптимальное решение не найдено. Следовательно,

необходимо, согласно приведенным выше правилам, заполнить нижние правые углы табл. 8 и перейти к новой табл. 9, соответствующей базису x_1, x_3, x_7 .

Далее процедура заполнения табл. 9 соответствует процедуре заполнения табл. 8.

В табл. 9 коэффициенты a_{oj} положительны, и она дает оптимальное решение задачи, которое найдем по столбцу свободных членов: $x_1 = 10$; $x_3 = 6$; $x_7 = 26$; $x_2 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$; $q'_{\max} = 1320$.

Таблица 8

Преобразованная матрица коэффициентов

	0	$-x_5$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
q'	960 360	60 -40	-10 20	-60 10	-70 90
x_1	16 -6	1 2/3	1 -1/3	1 -1/6	1 -3/2
x_6	36 6	-4 -2/3	2 1/3	6 1/6	9 3/2
x_7	14 12	-6 -4/3	-1 2/3	-2 1/3	-3 3

Таблица 9

Результаты оптимального решения

	0	$-x_5$	$-x_2$	$-x_6$	$-x_4$
q'	1320	20	10	10	20
x_1	10	5/3	2/3	1/6	-1/2
x_3	6	-2/3	1/3	1/6	3/2
x_7	26	-22/3	-1/3	1/3	0

Если сравнить полученный результат с результатом решения задачи симплекс-методом, то можно увидеть, что они совершенно одинаковы. Значит, задача решена правильно.

2.2. Задание к практическому занятию №2

Задание к практическому занятию №2 точно такое же, как и задание к практическому занятию №1 (см. табл. 5).

Практическое занятие №3. Моделирование операции лазерной обработки

3.1. Сущность моделируемой операции

В последнее время для операций обработки, в частности для обработки отверстий, были предприняты попытки использования мощных лазеров.

Основная идея состоит в том, чтобы сфокусировать значительную мощность на малой площади поверхности металла, создавая, таким образом, интенсивный нагрев и испарение с последующим образованием отверстия (рис. 20).

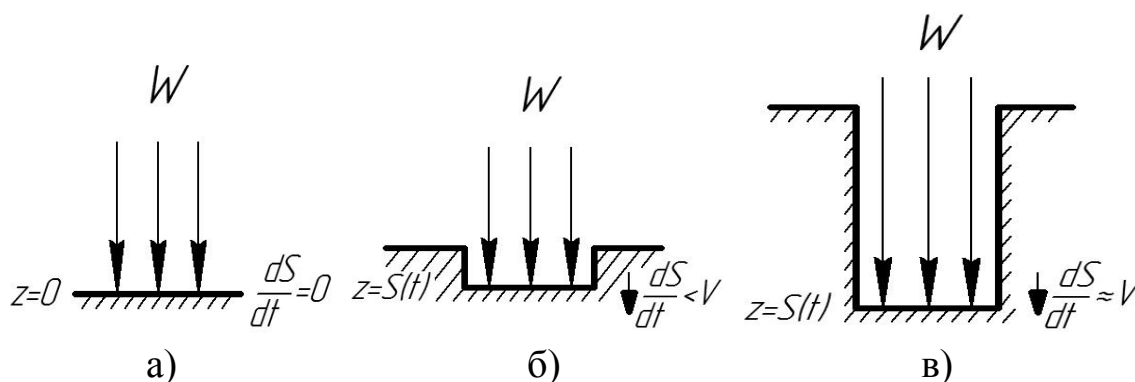


Рис. 20. Различные стадии образования выемки: предварительный нагрев поверхности металла до температуры испарения (а); раннее развитие движения на границе (б); установившееся движение на границе (в)

При обработке необходимо обеспечить такие условия процесса, чтобы ось выполненного отверстия была перпендикулярна плоскости обработки, и избегая при этом затекания расплавленного металла обратно в отверстие и застывания его там.

3.2. Укрупненная модель

Рассмотрим высокоэнергетический пучок лазерного излучения из π -электронов, сфокусированный на малом участке поверхности металла (рис. 20). Определенная энергия поглощается, а остальная отражается. Поглощение энергии происходит внутри слоя, толщина которого обычно гораздо меньше миллиметра, что вызывает поверхностный нагрев материала и рост температуры поверхности. Последняя, однако, растет не безгранично. Существуют два процесса, ограничивающие рост температуры. Первым является перенос тепла вглубь материала от нагретых к холодным участкам, обусловленный теплопроводностью. Второй обусловлен испарением.

Когда температура металла достигает точки кипения, скрытое тепло поглощается без дальнейшего увеличения температуры в процессе испарения металла. При удалении пара от поверхности заготовки в металле образуется выемка. Задача количественного описания этого процесса и вызывает необходимость математического моделирования.

В течение, по крайней мере, начальных стадий образования выемки гидродинамические явления не играют существенной роли.

В рассматриваемой модели предполагается, что процесс образования выемки не осложнен подобного рода явлениями. Для того чтобы показать внутреннюю противоречивость этого предположения, на некотором этапе решения задачи будет необходимо сравнить характерное время образования выемки, полученной по модели, основанной на теории теплопроводности, с характерным временем движения жидкости. Таким образом, рассматриваемая модель должна, по существу, описывать процесс разрушения металла, при котором энергия лазерного излучения не отражается от поверхности, а уходит час-

тично на испарение и частично переносится за счет теплопроводности вглубь заготовки.

В простейшем для анализа случае считается, что вся энергия, поступающая на поверхность, используется для испарения металла. Этот предельный режим испарения может возникнуть двумя путями. Первый – реализуется, когда энергия поступает на поверхность слишком быстро, так что тепло не успевает распространяться вглубь заготовки. Во втором – плотность мощности пучка постоянна, а распределение температуры впереди границы области испарения приближается к стационарному.

Предположим, что мощность W распространяется равномерно по некоторой площади A поверхности; пусть излучение приложено по нормали к поверхности. За интервал времени δt поступающая энергия равна $W \cdot \delta t$. Пусть глубина возникающей выемки равна δS , тогда объем испаряющегося материала равен $A \cdot \delta S$.

Используя закон сохранения энергии, получим

$$h \cdot \rho \cdot A \cdot \delta S = W \delta t, \quad (14)$$

где h – количество теплоты, требуемое для испарения единицы массы материала, Дж; ρ – плотность материала, кг/м³.

Преобразуя это выражение и полагая $\delta t \rightarrow 0$, получим скорость роста глубины выемки в виде

$$\frac{dS}{dt} = \frac{W / A}{h \cdot \rho} \quad (15)$$

Уравнение (15) показывает, что для любого металла предельная скорость образования выемки пропорциональна плотности энерговыведения W/A . Например для плотности энерговыведения пучка 1 кВт/мм², направленного на поверхность стали, предельная скорость равна 17 мм/с.

Интегрируя выражение (15) и полагая $S = 0$ при $t = 0$, найдем глубину выемки в предельный момент времени.

$$S(t) = \frac{1}{h \cdot \rho \cdot A} \int_0^t W dt$$

или

$$S(t) = \frac{E(t)}{h \cdot \rho \cdot A},$$

где $E(t)$ – полная энергия, выделенная источником за промежутки времени $(0, t)$. Таким образом, в предельном режиме испарения глубина выемки зависит только от полной энергии, поступившей на поверхность.

3.3. Уточненная математическая модель (учет теплопроводности)

На практике всегда существует перенос некоторого количества тепла в металле за счет теплопроводности, так что скорость в предельном режиме испарения представляет собой верхнюю границу скорости роста глубины выемки в металле. Интересно вычислить характерное время достижения этой предельной скорости. Общая задача движения границы раздела фаз с учетом теплопроводности известна как задача Стефана.

Предположим сначала, что тепло переносится в направлении, нормальном к поверхности. По существу, надо решить одномерное нестационарное уравнение теплопроводности.

$$\frac{\partial T^2}{\partial t^2} = \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

Для температуры внутри материала $T(z, t)$ вместе с граничными условиями на движущейся границе $Z = S(t)$ и на тыльной поверхности

материала. Здесь $D = \frac{\lambda}{\rho \cdot c}$ – коэффициент температуропроводности, λ, ρ, c – теплопроводность, плотность и удельная теплоемкость соответственно.

Условия на движущейся границе получаются в результате применения закона сохранения энергии в виде

$$\frac{W}{A} = L_v \cdot \rho \cdot \frac{dS}{dt} - \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (16)$$

где $\frac{W}{A}$ – плотность поглощения энергии, Вт/м²; W – мощность источника, Вт; A – площадь поверхности, м²; L_v – скрытая теплота испарения на единицу массы, кДж/кг; $L_v \cdot \rho \cdot \frac{dS}{dt}$ – скорость преобразования энергии в скрытую теплоту испарения; $\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z}$ – скорость переноса тепла в глубь материала, Вт/с.

Другое граничное условие состоит в том, что температура движущейся границы приблизительно равна температуре точки кипения

$$T = T_v, \text{ при } z = S(t). \quad (17)$$

На практике для всех металлов всегда существует некоторое испарение при температуре ниже действительной точки кипения.

Однако давление пара при этом обычно незначительно по сравнению с атмосферным давлением, за исключением случая, когда температура близка к точке кипения. Таким образом, условие (17) представляет собой вполне удовлетворительную аппроксимацию.

При сверлении отверстий в достаточно толстом слое металла наличие тыльной поверхности оказывает несущественное влияние. Поэтому для удобства целесообразно перенести эту поверхность в бесконечность, где полагая $T = 0$ и считая без потери общности температуру окружающей среды, равной нулю.

Для завершения постановки задачи необходимо также выставить граничные условия на другой границе раздела фаз, т. е. между твердым материалом и жидкостью.

Однако для многих важных на практике металлов отношение скрытых теплот плавления и парообразования мало по сравнению с единицей (например, для алюминия – 0,036; для железа – 0,045).

В результате можно, сохраняя достаточную точность, не учитывать нарушение непрерывности на этой фазовой границе.

Эта задача Стефана по сравнению с ее классическим вариантом оказывается более сложной благодаря наличию слагаемого, описывающего тепловыделение на движущейся границе.

Обычным подходом к решению такой задачи является использование численных методов (Ландау, 1950; Риди, 1965), что вызвано сложностью краевых задач теплопроводности с подвижной границей раздела фаз.

Здесь, однако, следует обратить внимание на простоту решения в предельном режиме испарения, рассмотренном при разработке предварительной математической модели. Можно ли использовать эту простоту?

Интуиция подсказывает возможность получения достаточно простого решения по крайней мере в том случае, когда скорость движения границы близка к скорости в предельном режиме испарения. В этом случае порядок отношения характерной величины потерь тепла за счет теплопроводности к величине скрытой теплоты парообразования можно записать:

$$\frac{K \cdot (\partial T / \partial z)}{L_v \cdot \rho \cdot (dS / dt)} = \varepsilon,$$

где ε – величина, постоянная для данного материала.

$$\varepsilon = \frac{c \cdot T_v}{L \cdot v}. \text{ Здесь числитель – тепло, требуемое для нагрева мате-}$$

риала до точки кипения; знаменатель – тепло, затрачиваемое на испарение при температуре кипения.

Для многих материалов, представляющих практический интерес, ε обычно мало по сравнению с единицей, например для алюминия $\varepsilon = 0,23$; для железа $\varepsilon = 0,21$.

Следовательно, решение при $\varepsilon = 0$, т. е. когда не учитывается теплопроводность, соответствует приемлемому приближению, при условии, что эффекты, связанные с теплопроводностью, малы.

В рассмотренной модели не учитывается давление жидкости.

Жидкость будет стекать в выемку по стенкам, и наступит момент, когда модель станет неприемлемой.

Оценим влияние сил тяжести на движение жидкости.

Из соображений размерности характерная скорость течения под действием сил тяжести равна

$$V = \frac{dz}{dt} \approx (g \cdot z)^{0,5},$$

где z – текущая глубина выемки.

Полагая, что $z = 0$ при $t = 0$, найдем при помощи интегрирования характерное время движения жидкости под влиянием сил тяжести в виде

$$t_{\text{грав}} \approx \left(\frac{z}{g}\right)^{0,5}.$$

Характерное время образования выемки глубиной z под действием лазерного излучения определяется из уравнения $\frac{dS}{dt} = \frac{W / A}{h \cdot \rho}$

$$\text{в виде } t_{\text{св}} \approx \frac{z \cdot \rho \cdot (L_v + c \cdot T_v)}{W / A}$$

Пренебрежение гидродинамическими эффектами оправдано при условии

$$t_{об} \leq t_{грав}.$$

$$\text{Таким образом, } z \leq \frac{(W / A)^2}{\rho^2 \cdot (L_v \cdot t \cdot c \cdot T_v)^2 \cdot g}. \quad (18)$$

Для лазера с плотностью энерговыделения $W/A = 20 \text{ кВт/мм}^2$, облучающего стальной образец ($\rho = 7,8 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$ и $L_v + c \cdot T_v = 7,4 \times 10^3 \text{ кДж/кг}$), условие (18) приводит к требованию $z \leq 24 \text{ мм}$.

На практике оказывается, что глубина выемки в материале ограничена, и приведенная оценка соответствует экспериментально найденным пределам. Следовательно, можно ожидать, что гидродинамический эффект играет значительную роль в ограничении глубины проникновения в материал.

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

Методика выполнения лабораторных работ

Студенты, приступающие к выполнению лабораторной работы, должны ознакомиться с содержанием работы. Допуск студента к выполнению лабораторной работы осуществляется только после проверки знания им соответствующих разделов теоретической части курса. Студенты, имеющие неудовлетворительные теоретические знания по разделам курса, относящимся к теме работы, к ее выполнению не допускаются.

Результаты лабораторной работы оформляют в виде отчета на нескольких листах формата А4. Допускается оформление отчета на двойных тетрадных листах. Первую страницу (титульный лист) отчета оформляют по образцу, приведенному в приложении А. Содержание последующих страниц отчета приведено в методических указаниях к каждой лабораторной работе.

Лабораторная работа считается выполненной после просмотра и подписи отчета преподавателем.

Подготовку некоторых исходных данных и выполнение проверочных расчетов следует производить на ЭВМ, используя соответствующие программы.

Лабораторные работы охватывают темы, рекомендованные типовой программой. На этих занятиях студенты получают задания на ранее запланированную работу вместе с методическими указаниями. По ходу выполнения работы результаты расчетов записывают в отчет. Кроме оформления письменного отчета с анализом и выводами по выполненному заданию, при его защите студент должен ответить на контрольные вопросы, вынесенные для самостоятельного изучения, в форме тестового контроля.

Лабораторная работа №1. Размерный анализ технологического процесса с применением теории графов

Цель работы: получение навыков выполнения размерного анализа технологического процесса с использованием метода теории графов.

1.1. Выявление технологических размерных цепей при помощи теории графов

Деталь в процессе ее изготовления можно рассматривать как геометрическую структуру, состоящую из множества поверхностей и связей (размеров) между ними. Такую структуру целесообразно изучать при помощи графов.

Если принять поверхности заготовки и детали за вершины, а связи между ними за дуги или ребра, то чертеж детали с конструкторскими и технологическими размерами можно представить в виде двух деревьев. Дерево с конструкторскими размерами (связями) и с размерами припусков на обработку называется *исходным*, а дерево с технологическими размерами – *производным*, или *технологическим*. При совмещении исходного и производного деревьев получается совмещенный граф. В таком графе в закодированной форме представлена геометрическая структура детали и технологического процесса обработки заготовки. Можно, не прибегая к помощи чертежа, а, пользуясь лишь информацией графа, производить все необходимые расчеты.

Любой замкнутый контур на совмещенном графе образует технологическую размерную цепь, в которой ребро исходного дерева является замыкающим звеном, а дуги производного дерева – составляющими звеньями. В терминах теории графов размерная цепь – это

путь в производном дереве, заданный ребром исходного дерева. При известных длинах дуг производного дерева в данной цепи можно найти длину пути, т. е. размер или допуск замыкающего звена.

В каждой размерной цепи один размер должен быть ребром исходного дерева, а остальные – дугами производного дерева.

Для построения графа размерных цепей необходимо на основе предварительно разработанного маршрутного технологического процесса [7, 17] составить его размерную схему.

В качестве примера представим маршрутный технологический процесс изготовления ступенчатого вала в крупносерийном производстве (табл. 10). На эскизе заготовки вала (рис. 21,а) представлены размеры заготовки Z_1 , Z_2 и Z_3 , а также размеры припусков Z_2 , Z_4 , Z_5 , Z_6 , Z_7 , Z_9 . Индекс размеру припуска присваивают по номеру той поверхности, которая образуется в результате его съема. Конструкторские (чертежные) размеры детали представлены на ее эскизе (рис. 21,б). Все размеры, образующие при обработке торцов и буртиков вала линейную размерную цепь, включающую в качестве звеньев технологические размеры S_i , размеры заготовки Z_i , конструкторские размеры A_i и размеры припусков Z_i , представлены на размерной схеме (рис. 22).

Чтобы четко определять положение заготовки на конкретной операции, необходимо указать на эскизе (см. табл. 10) характерные (обрабатываемые и базовые) поверхности заготовки. При этом нет необходимости указывать все поверхности.

На пятой операции фрезеруют торцы 2 и 9, при этом снимают припуски Z_2 , Z_9 и выдерживают линейные размеры S_1 (расстояние между торцами 2 и 3) и S_2 (расстояние между торцами 2 и 9) (см. рис. 22) (табл. 10). Заготовку на пятой операции устанавливают в призмы с опорой на поверхность 3 заготовки. На пятой операции сверлят также центровые отверстия, которые будут использованы на последующих операциях в качестве двойной направляющей технологической базы.

На десятой операции протачивают поверхности 11, 13 и торец 7, выдерживая размеры D_2 и D_3 . Заготовку устанавливают в трехкулачковый токарный патрон с упором в торец 2 (технологическая опорная база). На этой операции снимают припуск Z_7 и выдерживают технологический размер S_3 (расстояние между торцами 2 и 7). Здесь же протачивают окончательно торец 6, снимая припуск Z_6 между поверхностью 6 и 7, и выдерживают технологический размер S_4 , связывающий торцы 2 и 6.

На пятнадцатой операции протачивают поверхность 16, выдерживая размер D_1 , и торец 4, снимая припуск Z_4 и выдерживая технологический размер S_5 , связывающий торцы 6 и 4. На этой же операции протачивают окончательно поверхность 5. Снимают припуск Z_5 между поверхностями 4 и 5, выдерживают технологический размер S_6 , связывающий торцы 6 и 5.

Размеры заготовки и технологические размеры из таблицы маршрутного технологического процесса наносят на размерную схему (см. рис. 22), причем конец размерной линии, соответствующий базовой поверхности, помечают точкой, а конец, соответствующий обрабатываемой поверхности, – стрелкой. Затем приступают к построению графа размерной цепи, придерживаясь следующего порядка (рис. 23).

Сначала строят производное, затем исходное дерево и затем совмещают их. При совмещении получается граф технологических размерных цепей. Вершины (поверхности) обозначают кружочками, внутри которых указывают их номер.

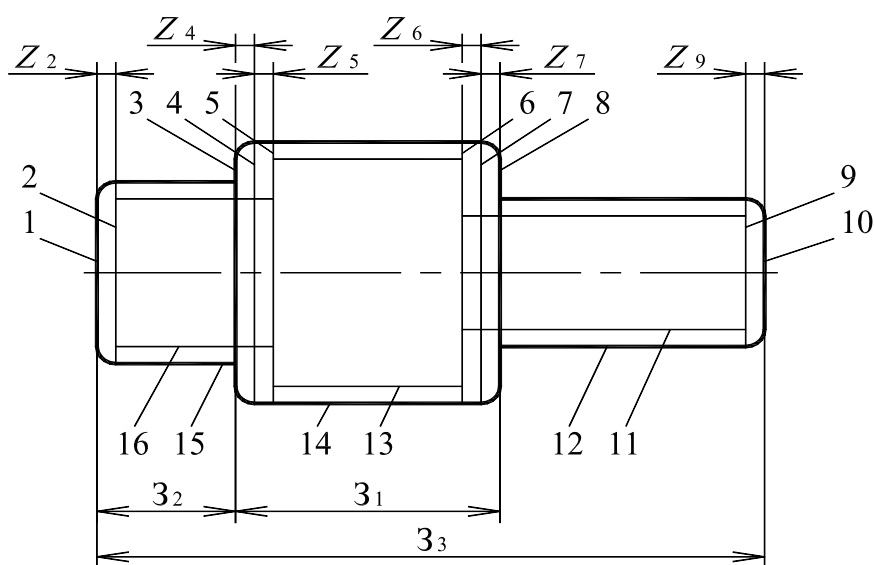
Таблица 10

**Маршрутный технологический процесс обработки
заготовки вала**

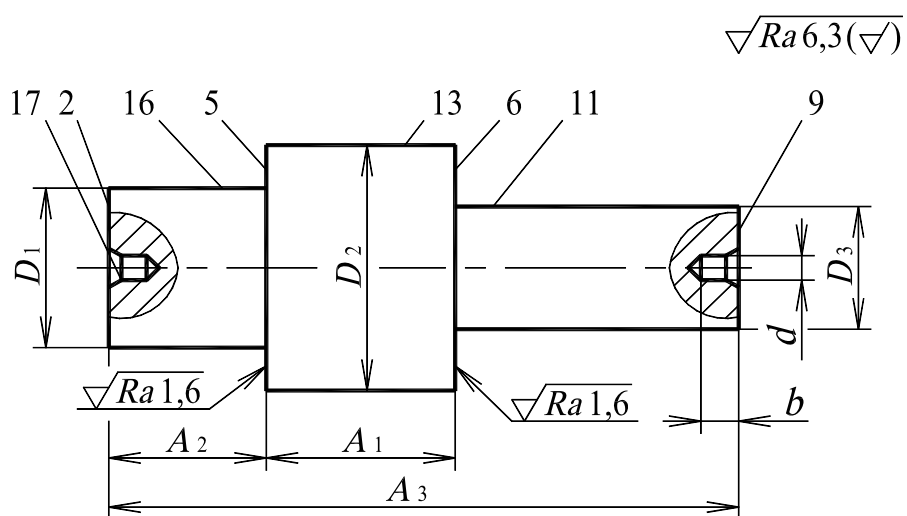
Номер операции	Наименование и содержание операции	Технологические эскизы
1	2	3
5	Фрезерно-центровальная 1. Фрезеровать поверхности 2 и 9. 2. Центровать 2 отв. 17.	
10	Автоматная токарная 1. Точить поверхности 11 и 13 окончательно, поверхность 7, предварительно.	
	2. Точить поверхность 6 окончательно.	
15	Автоматная токарная 1. Точить поверхность 16 окончательно, поверхность 4 предварительно.	

Окончание табл. 10.

1	2	3
	2. Точить поверхность 5 окончательно.	



а)

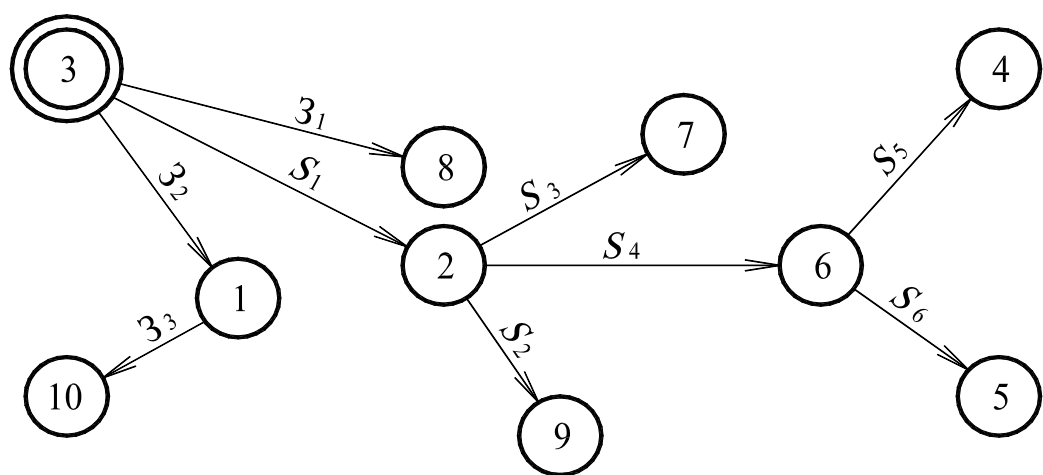


б)

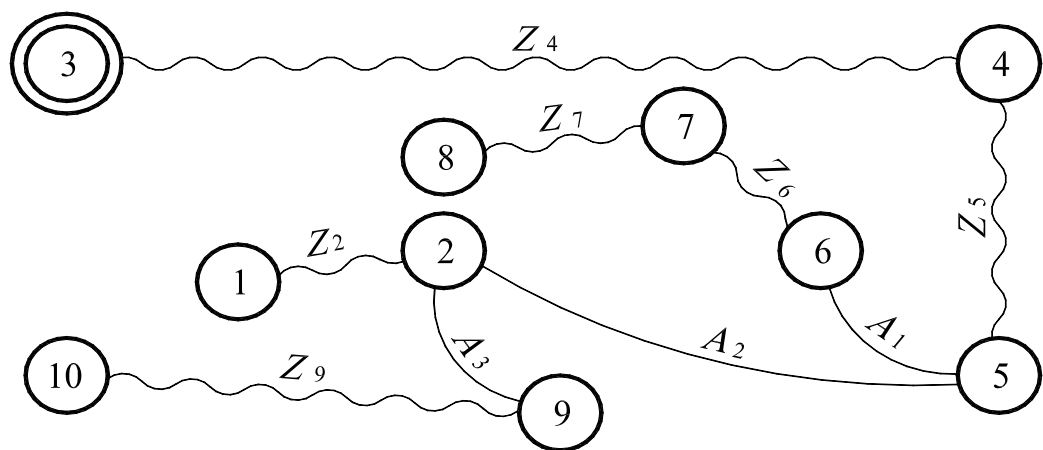
Рис. 21. Эскизы заготовки (а) и детали (б)

Дуги производного дерева (рис. 23,а) изображают прямыми линиями со стрелками на конце, показывающими, в какую вершину они входят. Производное дерево – граф ориентированный. В качестве корня производного дерева выбирают вершину, к которой по размерной схеме технологического процесса не подходит ни одна стрелка (см. рис. 22). Такую вершину следует вычертить в виде двойного кружка и провести из нее те дуги, которые касаются ее своими неориентированными концами. На ориентированных концах этих дуг необходимо указать кружками вершины (поверхности), в которые они упираются своими стрелками. Из этих вершин следует провести те дуги, которые касаются их неориентированными концами, а на концах со стрелками указать вершины, в которые они входят. Этот процесс продолжают до тех пор, пока все ветви дерева не упрутся в вершины (поверхности), из которых не выходит ни одна стрелка. На этом построение производного дерева заканчивается.

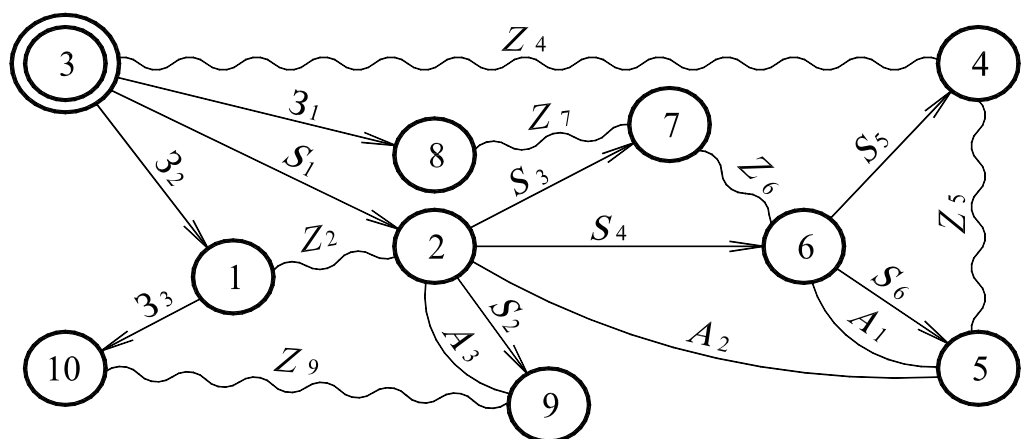
Аналогично строят исходное дерево (рис. 23,б). Начинают его построение с расположения вершин на бумаге в том же порядке, в каком они располагались при построении производного дерева. Исходное дерево – неориентированный граф – состоит из ребер, поэтому при построении можно выбрать корнем любую вершину, т. е. поверхность на чертеже готовой детали. Конструкторские размеры обозначают кривыми, а размеры припусков – волнистыми линиями. Так как исходное дерево состоит из ребер, не имеющих направления, то оно лишь указывает на то, какие вершины (поверхности) связаны между собой конструкторскими размерами, а какие – размерами припусков.



а)



б)



в)

Рис. 23. Порядок построения графа технологических размерных цепей:
производное (а) и исходное (б) деревья; совмещенный граф (в)

После построения каждого дерева проверяют правильность их построения по следующим признакам [5, 11, 14]:

1. Число вершин у каждого дерева должно быть равно числу поверхностей на размерной схеме технологического процесса.

2. Число ребер (дуг) у каждого дерева должно быть одинаковым, а по значению – на одно меньше, чем вершин.

3. К каждой вершине производного дерева, кроме корневой, должна подходить только одна стрелка дуги, а к корневой вершине – ни одной.

4. Деревья не должны иметь разрывов и замкнутых контуров.

После проверки деревья совмещают так, чтобы одноименные вершины совпадали. Практически два дерева отдельно можно не строить, т. е. сначала строят производное дерево, а затем на нем же – исходное. Процесс разбиения графа на отдельные деревья осуществляют для упрощения корректировки положения вершин, так как последние надо располагать таким образом, чтобы ребра и дуги совмещенного графа не пересекались. Совмещенный граф и будет графом технологических размерных цепей (рис. 23,в).

Граф размерных цепей не только облегчает выявление цепей, но и позволяет обнаруживать ошибки в технологии или чертеже. Например, если при составлении производного или исходного деревьев обнаружится разрыв между вершинами или появится замкнутый контур, то это указывает в первом случае на отсутствие нужных размеров в технологии или на чертеже, а во втором – на наличие лишних размеров.

Любой замкнутый контур совмещенного графа образует размерную цепь, у которой ребро исходного дерева является замыкающим звеном, а составляющие звенья представлены дугами производного дерева. Например, на рис. 23,в звенья Z_2 , S_1 и Z_2 образуют замкнутый контур, т. е. размерную цепь, у которой дуги Z_2 и S_1 – состав-

ляющие звенья, а ребро Z_2 – замыкающее звено. Замкнутый контур из звеньев A_2 , S_4 и S_6 образует новую размерную цепь с замыкающим звеном – ребром A_2 и составляющими звеньями – дугами S_4 и S_6 .

Так как в размерной цепи только одно звено может быть замыкающим (конструкторский размер или размер припуска), то при выявлении размерных цепей по графу необходимо выбирать такие контуры, в которых бы содержалось только по одному ребру исходного дерева, а остальные звенья (дуги) принадлежали бы к производному дереву. Например, на рис. 23, в звенья Z_6 , Z_7 , Z_1 , S_1 и S_4 образуют замкнутый контур, но в нем ребра Z_6 и Z_7 принадлежат исходному дереву, поэтому такой контур не следует использовать в качестве размерной цепи. В данном случае следует рассмотреть два контура или две размерные цепи, а именно: замкнутый контур из звеньев Z_7 , Z_1 , S_1 и S_3 и контур из звеньев Z_6 , S_3 и S_4 . Точно так же цепь, состоящую из звеньев Z_4 , Z_1 , Z_7 , S_3 , S_4 и S_5 , следует разбить на две цепи, у одной из которых замыкающим звеном будет Z_7 , а у другой Z_4 .

Вместе с выявлением технологических размерных цепей необходимо по графу определить также знаки составляющих звеньев по следующему правилу. Замыкающему звену присваивают знак минус и, начиная от этого звена, обходят замкнутый контур в определенном направлении. Обход цепи начинают с меньшей из двух вершин, связанных замыкающим звеном. Если в направлении обхода следующее звено цепи будет соединять вершину меньшего порядкового номера с вершиной большего номера, то звену присваивают знак «плюс»; если звено соединяет вершину большего номера с вершиной меньшего номера, то ему присваивают знак «минус». Одновременно с определением знаков звеньев размерной цепи составляют расчетные уравнения из условия, что алгебраическая сумма всех звеньев размерной цепи, включая и замыкающее, равна нулю. Затем эти уравнения преобразуют в исходные, т. е. составленные относительно замыкаю-

щего звена. В исходном уравнении (в правой части) звенья, имеющие знак плюс, являются увеличивающими, а имеющие знак минус – уменьшающими.

Выявление и расчет технологических размерных цепей по графу начинают с двухзвенных контуров, а затем в такой последовательности, чтобы в каждой цепи имелось только одно неизвестное по величине звено, а остальные звенья были определены расчетом предыдущих размерных цепей.

Рассмотрим простановку знаков звеньев цепи, состоящей из звеньев A_2 , S_4 , S_6 (рис. 23,в). Замыкающему звену $A_{2\Delta}$ присвоим знак минус. Обход контура начинаем с вершины 2. Звено S_4 соединяет вершину 2 с вершиной 6, значит оно имеет знак плюс (обход от меньшего к большему номеру). Звено S_6 соединяет вершину 6 с вершиной 5, поэтому оно имеет знак минус (обход от большего к меньшему номеру). Следовательно, расчетное уравнение цепи имеет вид

$$-A_{2\Delta} + \vec{S}_4 - \vec{S}_6 = 0.$$

Исходное уравнение запишем следующим образом:

$$A_{2\Delta} = \vec{S}_4 - \vec{S}_6.$$

Для графа, представленного на рис. 23,в, расчетные, исходные уравнения и определяемые размеры приведены в табл. 11.

Пример и последовательность расчета технологических размерных цепей представлены в работах, рекомендованных к данной теме.

Таблица 11

Уравнения для расчета технологических размерных цепей

Номер размерной цепи	Расчетное уравнение	Исходное уравнение	Определяемый размер
1	$-A_{3\Delta} + \vec{S}_2 = 0$	$A_{3\Delta} = \vec{S}_2$	S_2
2	$-A_{1\Delta} + \vec{S}_6 = 0$	$A_{1\Delta} = \vec{S}_6$	S_6

Номер размер- ной цепи	Расчетное уравнение	Исходное уравнение	Опреде- ляемый размер
3	$-A_{2\Delta} + \vec{S}_4 - \vec{S}_6 = 0$	$A_{2\Delta} = \vec{S}_4 - \vec{S}_6$	S_4
4	$-Z_{6\Delta} - \vec{S}_4 + \vec{S}_3 = 0$	$Z_{6\Delta} = \vec{S}_3 - \vec{S}_4$	S_3
5	$-Z_{5\Delta} + \vec{S}_5 - \vec{S}_6 = 0$	$Z_{5\Delta} = \vec{S}_5 - \vec{S}_6$	S_5
6	$-Z_{4\Delta} - \vec{S}_1 + \vec{S}_4 - \vec{S}_5 = 0$	$Z_{4\Delta} = \vec{S}_4 - \vec{S}_1 - \vec{S}_5$	S_1
7	$-Z_{2\Delta} + \vec{S}_1 - \vec{S}_1 = 0$	$Z_{2\Delta} = \vec{S}_1 - \vec{S}_1$	S_1
8	$-Z_{7\Delta} - \vec{S}_3 + \vec{S}_1 + \vec{S}_2 = 0$	$Z_{7\Delta} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 - \vec{S}_3$	S_2
9	$-Z_{9\Delta} - \vec{S}_2 + \vec{S}_1 - \vec{S}_1 + \vec{S}_3 = 0$	$Z_{9\Delta} = \vec{S}_1 + \vec{S}_3 - \vec{S}_2 - \vec{S}_1$	S_3

1.2. Методика расчета технологических размерных цепей

В технологических размерных цепях число составляющих звеньев редко бывает больше пяти (в нашем примере то же самое – см. табл. 11). Поэтому расчет технологических размерных цепей производят, как правило, по методу полной взаимозаменяемости (максимума – минимума).

Методика расчета технологических размерных цепей зависит от того, какое звено является замыкающим: размер припуска или конструкторский размер детали по чертежу. Если замыкающим звеном является размер припуска Z_{Δ} , определяемый для последующей операции (перехода), то сначала определяют его минимальную величину $Z_{\Delta\min}$ по справочным таблицам (прил. Б) или расчетно-аналитическим методом [7, 16]. Минимально необходимый припуск на обработку, удаляемый на данной операции, складывается из высоты неровностей профиля и глубины дефектного слоя, сформировавшихся на преды-

дущем переходе (операции), суммарного отклонения расположения и формы поверхности заготовки и погрешности установки заготовки на выполняемом переходе (операции).

Максимально возможный припуск $Z_{i\max}$ при обработке поверхности определяется расчетом технологической размерной цепи; величиной $Z_{i\min}$ и суммой допусков, входящих в размерную цепь размеров.

Определив $Z_{\Delta\min}$, составляют исходное уравнение размерной цепи относительно $Z_{\Delta\min}$:

$$Z_{\Delta\min} = \sum_{i=1}^{\kappa} \vec{X}_{i\min} - \sum_{i=\kappa+1}^{m-1} \vec{X}_{i\max}, \quad (18)$$

где $\vec{X}_{i\min}$ – наименьший предельный размер i -го увеличивающего звена размерной цепи, мм; $\vec{X}_{i\max}$ – наибольший предельный размер i -го уменьшающего звена размерной цепи, мм; m – число звеньев в цепи; κ – число увеличивающих звеньев размерной цепи.

Так как в каждой технологической размерной цепи имеется только одно неизвестное составляющее звено, то задача сводится к решению уравнения (18) с одним неизвестным. Обозначим определяемый размер через X . Если искомый размер является уменьшающим звеном, то

$$\vec{X}_{\max} = \sum_{i=1}^{\kappa} \vec{X}_{i\min} - \sum_{i=\kappa+1}^{m-2} \vec{X}_{i\max} - Z_{\Delta\min}. \quad (19)$$

Если же искомый размер является увеличивающим звеном, то

$$\vec{X}_{\min} = Z_{\Delta\min} - \sum_{i=1}^{\kappa-1} \vec{X}_{i\min} + \sum_{i=\kappa+1}^{m-2} \vec{X}_{i\max}. \quad (20)$$

Определив величину $X_{\max}$ или $X_{\min}$, на размер X устанавливают допуск T_x в зависимости от назначения технологической операции (перехода) – предварительная или окончательная обработка (прил. В). В первом случае обычно назначают допуск по 12 – 14 качеству, во

втором – по 9 – 11 качеству. Шлифование обеспечивает обработку по 6 – 8 качеству.

Предельные отклонения назначают по h , $IT/2$ или H (ГОСТ 25347). По величине установленного допуска T_x и по его расположению относительно X (h , H или $IT/2$) определяют номинальный размер X по одной из следующих формул:

$$\bar{X} = \bar{X}_{\max} - ESX; \quad (21)$$

$$\bar{X} = \bar{X}_{\min} + EIX, \quad (22)$$

где ESX и EIX – соответственно верхнее и нижнее предельные отклонения данного размера, мм.

Далее определяют номинальный размер припуска Z_{Δ} и его наибольший предельный размер $Z_{\Delta \max}$. Для этого составляют исходное уравнение размерной цепи относительно Z_{Δ} с указанием предельных отклонений для всех составляющих звеньев. На основании этого уравнения суммируют номинальные размеры и предельные отклонения отдельно для увеличивающих и уменьшающих звеньев. По разности сумм номинальных размеров увеличивающих и уменьшающих звеньев определяют номинальный размер припуска

$$Z_{\Delta} = \sum_{i=1}^{\kappa} \bar{X}_i - \sum_{i=\kappa+1}^{m-1} \bar{X}_i, \quad (23)$$

а по разности суммы предельных отклонений – предельные отклонения размера припуска

$$ESZ_{\Delta} = \sum_{i=1}^{\kappa} ES\bar{X}_i - \sum_{i=\kappa+1}^{m-1} EI\bar{X}_i, \quad (24)$$

$$EIZ_{\Delta} = \sum_{i=1}^{\kappa} EI\bar{X}_i - \sum_{i=\kappa+1}^{m-1} ES\bar{X}_i \quad (25)$$

и, наконец, максимальное значение величины припуска $Z_{\Delta \max}$.

1.3. Задание к лабораторной работе №1

Разработать маршрутный технологический процесс изготовления детали согласно варианту, выданному преподавателем по табл. 12 и рассчитать технологические размерные цепи методом теории графов.

1.4. Содержание работы

В процессе выполнения лабораторной работы разрабатывают маршрутный технологический процесс изготовления представленных на рис. 24 или рис. 25 деталей и производят расчет технологических размерных цепей методом теории графов. Проверяют возможность обеспечения заданных на чертеже конструкторских размеров, рассчитывают межоперационные припуски и операционные размеры, представленные на технологических эскизах разработанного студентом маршрутного технологического процесса. Исходные данные для расчета поставлены в соответствии с номером варианта студента (табл. 12). Проверяют правильность результатов расчетов размерных цепей методами теории графов вручную, расчетом с использованием программы «Chains» (прил. Г), оформляют отчет с приложением к нему распечатки результатов расчета по этой программе.

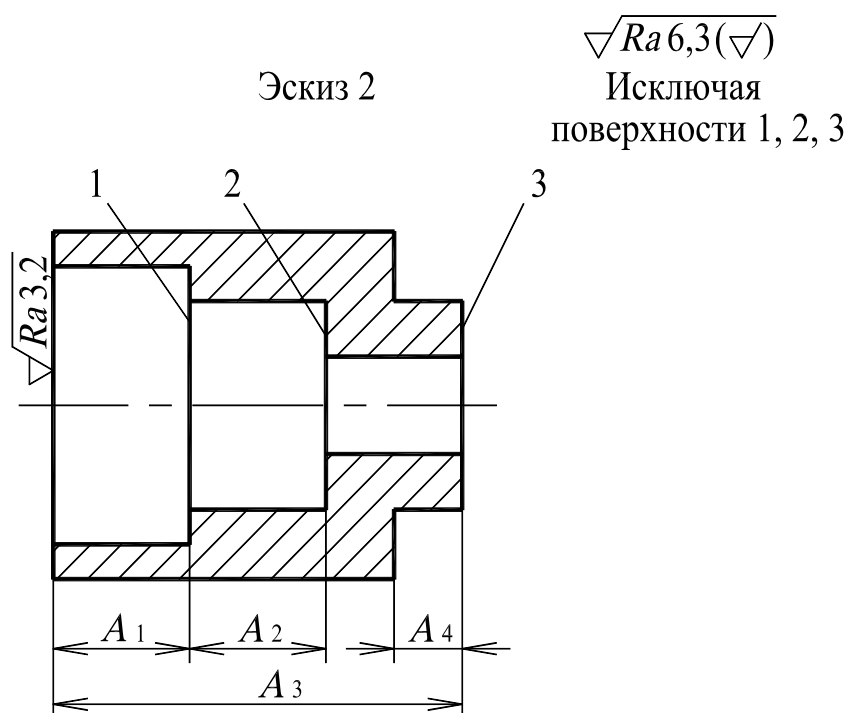
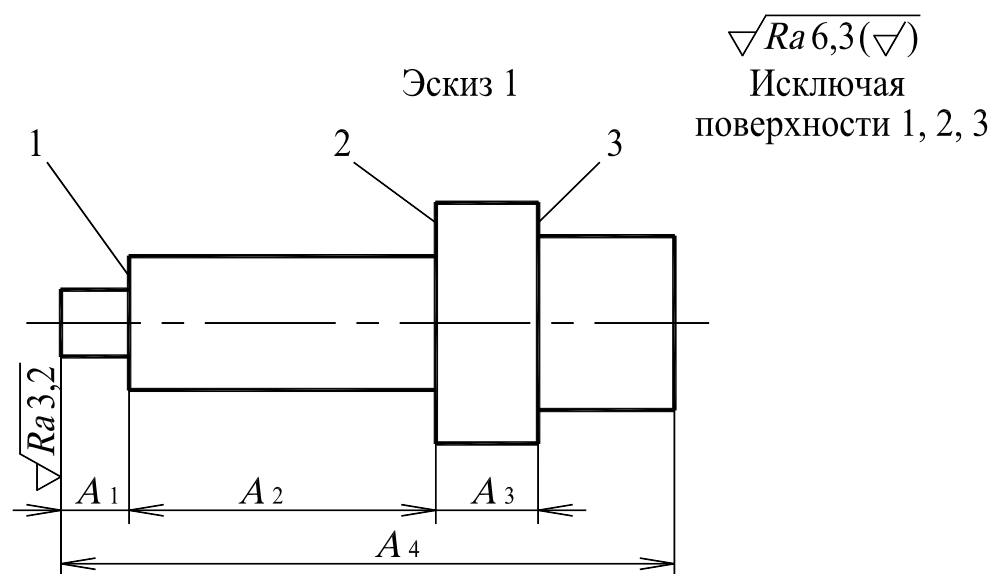


Рис. 24. Эскизы деталей для выполнения лабораторной работы №1

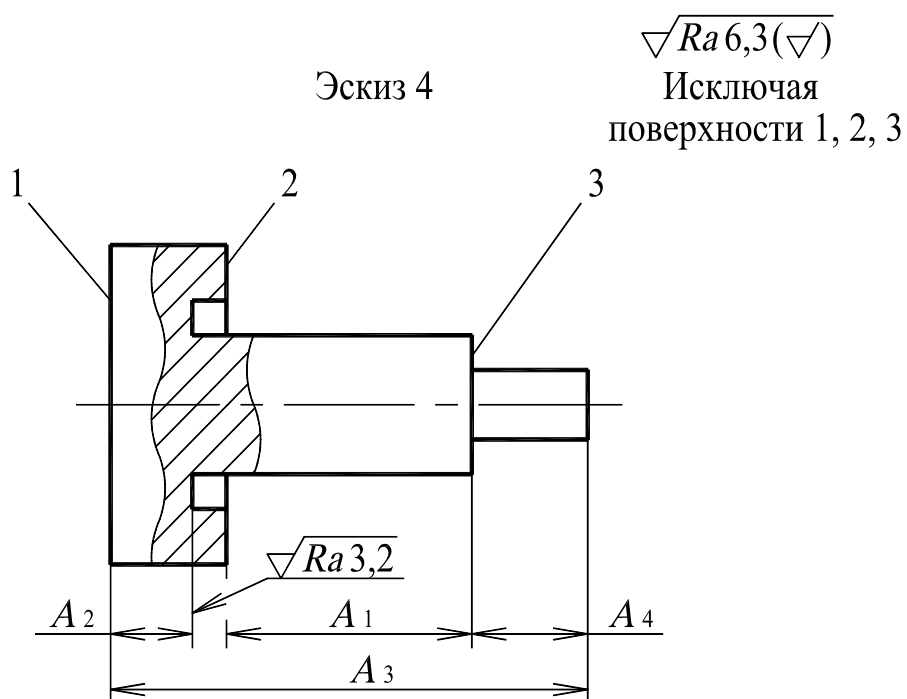
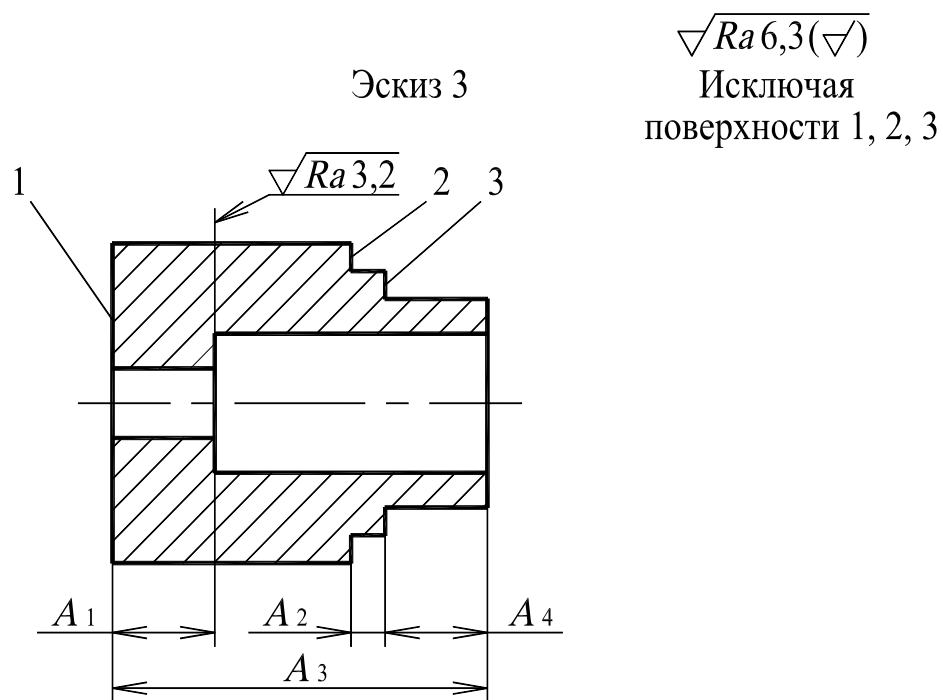


Рис. 25. Эскизы деталей для выполнения лабораторной работы №1

1.5. Средства технологического оснащения

- Персональный компьютер;
- микрокалькулятор.

Таблица 12

Исходные данные к лабораторной работе №1

№ ва- ри- ан- та	№ эс- ки- за	Размеры детали, мм				Шероховатость (Ra) поверхностей в соответствии с их номераами на эскизе, мкм			Годовая про- грамма выпус- ка дета- лей, шт.
		A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	1	2	3	
<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>10</i>
1	1	5 ^{+0,1}	40 _{-0,1}	30 _{-0,1}	78 _{-0,1}	6,3	3,2	1,6	12 000
2	1	10 ^{+0,1}	60 _{-0,15}	20 _{-0,2}	100 _{-0,1}	1,6	0,8	3,2	40 000
3	1	7 ^{+0,5}	80 _{-0,3}	10 _{-0,3}	115 _{-0,1}	1,6	3,2	0,8	300
4	1	8 ^{+0,3}	100 _{-0,2}	15 _{-0,1}	130 _{-0,2}	0,8	0,8	0,8	100 000
5	1	15 _{-0,1}	125 _{-0,05}	25 _{-0,05}	190 _{-0,5}	6,3	3,2	6,3	15 000
6	1	20 _{-0,5}	20 _{-0,1}	10 _{-0,1}	80 _{-0,1}	3,2	6,3	6,3	25 000
7	1	10 _{-0,1}	35 _{-0,1}	5 _{-0,1}	85 _{-0,1}	6,3	6,3	3,2	5000
8	1	15 ^{+0,2}	65 _{-0,6}	8 _{-0,2}	120 _{-0,2}	3,2	0,8	3,2	2500
9	1	7 _{-0,2}	75 _{-0,05}	12 _{-0,3}	110 _{-0,3}	3,2	3,2	3,2	800
10	1	12 ^{+0,2}	81 _{-0,15}	16 _{-0,6}	120 _{-0,5}	3,2	0,8	0,8	10 000
11	1	20 _{-0,5}	35 _{-0,4}	10 _{-0,1}	85 _{-0,2}	6,3	3,2	3,2	300
12	1	15 _{-0,5}	20 _{-0,1}	5 _{-0,1}	80 _{-0,2}	1,6	3,2	1,6	15 000
13	1	20 _{-0,5}	60 _{-0,15}	20 _{-0,2}	120 _{-0,4}	3,2	1,6	1,6	5000
14	2	20 _{-0,5}	15 _{-0,2}	45 _{-0,1}	5 _{-0,1}	6,3	3,2	1,6	50
15	2	10 _{-0,4}	15 _{-0,2}	50 _{-0,2}	10 _{-0,1}	3,2	1,6	6,3	100 000
16	2	28 _{-0,3}	14 _{-0,1}	60 _{-0,5}	10 _{-0,1}	1,6	6,3	3,2	3000
17	2	10 ^{+0,3}	10 _{-0,1}	25 _{-0,1}	3 _{-0,1}	1,6	3,2	0,8	25 000
18	2	20 ^{+0,6}	20 _{-0,3}	50 _{-0,5}	5 _{-0,2}	3,2	1,6	6,3	70 000
19	2	10 ^{+0,1}	10 _{-0,1}	30 ^{+0,1}	6 _{-0,2}	6,3	1,6	3,2	125 000
20	2	30 ^{+0,4}	35 _{-0,3}	80 ^{+0,3}	10 _{-0,1}	3,2	6,3	1,6	50 000
21	2	20 _{-0,2}	20 _{-0,2}	64 ^{+0,1}	6 _{-0,1}	0,8	1,6	3,2	10 000
22	2	20 _{-0,1}	30 _{-0,1}	60 _{-0,1}	5 _{-0,1}	0,8	3,2	1,6	6000
23	2	20 _{-0,1}	60 _{-0,4}	100 _{-0,5}	10 _{-0,2}	1,6	0,8	3,2	40 000
24	2	30 ^{+0,4}	40 _{-0,3}	90 _{-0,5}	8 _{-0,1}	3,2	0,8	1,6	100
25	2	25 ^{+0,3}	20 _{-0,2}	65 _{-0,1}	10 _{-0,2}	1,6	1,6	1,6	5000
26	3	5 ^{+0,1}	40 _{-0,1}	30 _{-0,1}	78 _{-0,1}	6,3	3,2	1,6	12 000
27	3	10 ^{+0,1}	60 _{-0,15}	20 _{-0,2}	100 _{-0,1}	1,6	0,8	3,2	40 000
28	3	7 ^{+0,5}	80 _{-0,3}	10 _{-0,3}	115 _{-0,1}	1,6	3,2	0,8	300
29	3	8 ^{+0,3}	100 _{-0,2}	15 _{-0,1}	130 _{-0,2}	0,8	0,8	0,8	100 000
30	3	15 _{-0,1}	125 _{-0,05}	25 _{-0,05}	190 _{-0,5}	6,3	3,2	6,3	15 000
31	3	20 _{-0,5}	20 _{-0,1}	10 _{-0,1}	80 _{-0,1}	3,2	6,3	6,3	25 000

Окончание табл. 12

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
32	3	10 _{-0,1}	35 _{-0,1}	5 _{-0,1}	85 _{-0,1}	6,3	6,3	3,2	5000
33	3	15 ^{+0,2}	65 _{-0,6}	8 _{-0,2}	120 _{-0,2}	3,2	0,8	3,2	2500
34	3	7 _{-0,2}	75 _{-0,05}	12 _{-0,3}	110 _{-0,3}	3,2	3,2	3,2	800
35	3	12 ^{+0,2}	81 _{-0,15}	16 _{-0,6}	120 _{-0,5}	3,2	0,8	0,8	10 000
36	3	20 _{-0,5}	35 _{-0,4}	10 _{-0,1}	85 _{-0,2}	6,3	3,2	3,2	300
37	3	15 _{-0,5}	20 _{-0,1}	5 _{-0,1}	80 _{-0,2}	1,6	3,2	1,6	15 000
38	3	20 _{-0,5}	60 _{-0,15}	20 _{-0,2}	120 _{-0,4}	3,2	1,6	1,6	5000
39	4	20 _{-0,5}	15 _{-0,2}	45 _{-0,1}	5 _{-0,1}	6,3	3,2	1,6	50
40	4	10 _{-0,4}	15 _{-0,2}	50 _{-0,2}	10 _{-0,1}	3,2	1,6	6,3	100 000
41	4	28 _{-0,3}	14 _{-0,1}	60 _{-0,5}	10 _{-0,1}	1,6	6,3	3,2	3000
42	4	10 ^{+0,3}	10 _{-0,1}	25 _{-0,1}	3 _{-0,1}	1,6	3,2	0,8	25 000
43	4	20 ^{+0,6}	20 _{-0,3}	50 _{-0,5}	5 _{-0,2}	3,2	1,6	6,3	70 000
44	4	10 ^{+0,1}	10 _{-0,1}	30 ^{+0,1}	6 _{-0,2}	6,3	1,6	3,2	125 000
45	4	30 ^{+0,4}	35 _{-0,3}	80 ^{+0,3}	10 _{-0,1}	3,2	6,3	1,6	50 000
46	4	20 _{-0,2}	20 _{-0,2}	64 ^{+0,1}	6 _{-0,1}	0,8	1,6	3,2	10 000
47	4	20 _{-0,1}	30 _{-0,1}	60 _{-0,1}	5 _{-0,1}	0,8	3,2	1,6	6000
48	4	20 _{-0,1}	60 _{-0,4}	100 _{-0,5}	10 _{-0,2}	1,6	0,8	3,2	40 000
49	4	30 ^{+0,4}	40 _{-0,3}	90 _{-0,5}	8 _{-0,1}	3,2	0,8	1,6	100
50	4	25 ^{+0,3}	20 _{-0,2}	65 _{-0,1}	10 _{-0,2}	1,6	1,6	1,6	5000

1.6. Порядок выполнения работы

- Изучают и вычерчивают эскиз детали;
- выбирают метод получения заготовки и вычерчивают ее эскиз;
- назначают припуски на механическую обработку поверхностей заготовки;
- разрабатывают маршрутный технологический процесс изготовления детали и оформляют его по форме табл. 10;
- строят размерную схему технологического процесса (с нанесенными на ней конструкторскими и технологическими размерами и размерами заготовки и припусков);
- строят производное, исходное дерево и совмещенный граф;
- составляют расчетные и исходные уравнения и заносят их в таблицу по форме табл. 11.

- рассчитывают допуски на технологические размеры и размеры заготовки, а также определяют предельные значения припусков;
- проверяют правильность полученных результатов на ЭВМ с помощью программы «Chains» (прил. Г);
- оформляют отчет по лабораторной работе согласно п. 1.7 настоящего учебного пособия (ручной расчет размерных цепей с приложением распечатки расчета с помощью программы «Chains»).

1.7. Содержание отчета по лабораторной работе №1

Эскиз детали с указанными конструкторскими размерами, допусками и шероховатостью поверхностей

Эскиз заготовки с указанными размерами заготовки и припусками на механическую обработку

Маршрутный технологический процесс изготовления детали
(по форме табл. 10)

Размерная схема технологического процесса

Производное дерево. Исходное дерево. Совмещенный граф

Уравнения для расчета технологических размерных цепей
(по форме табл. 11)

Расчет допусков на технологические размеры, размеры заготовки и определение предельных значений припусков

Выводы

Лабораторная работа №2. Составление расписаний при краткосрочном планировании работы гибких производственных систем с использованием метода «ветвей и границ»

Цель работы: получение навыков организации работы ГПС с использованием методов теории расписаний.

2.1. Пример составления расписания

Рассмотрим на конкретном примере разработку расписания изготовления восьми деталей на двух станках (табл. 13), составленного по рассмотренному выше методу «ветвей и границ» (см. тему №6 теоретической части данного пособия) [5, 14].

Таблица 13

Трудоемкость изготовления восьми деталей

Номер станка	Номер детали							
	1	2	3	4	5	6	7	8
	Трудоемкость операции, мин							
1	6	7	3	5	10	7	6	5
2	8	5	2	6	8	7	4	9

Разобьем все детали на две группы:

- первая группа ($p_j \leq q_j$): 1, 4, 6, 8;
- вторая группа ($p_j > q_j$): 2, 3, 5, 7.

Упорядочим первую группу по возрастанию p_j : 4, 8, 1, 6. Упорядочим вторую группу по убыванию q_j : 5, 2, 7, 3. Включив в расписание работы первого станка сначала заготовки деталей первой группы, затем второй, получим расписание (41, 81, 11, 61, 51, 21, 71, 31). На втором станке сохраним ту же последовательность, что и на пер-

вом станке. Расписание работы двух станков выглядит следующим образом: $A = (41, 81, 11, 61, 51, 21, 71, 31; 42, 82, 12, 52, 22, 72, 32)$ (рис. 26).

Анализируя эту диаграмму, нетрудно убедиться в том, что найденное оптимальное расписание не является единственным.

Номер станка	Время, мин												
	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
1	41	81	11	61		51		21	71	31			
2		42		82	12		62		52	22	72	32	

Рис. 26. Расписание изготовления восьми деталей

Например, в последовательности подачи заготовок на второй станок можно без увеличения продолжительности изготовления всего комплекта деталей поменять местами заготовки деталей 7 и 3. Таким образом, предположив, что на втором станке сохраняется та же последовательность обработки, что и на первом, мы отбросили не только худшие, но и равные по качеству расписания. Важно, однако, чтобы среди оставшихся расписаний сохранилось оптимальное.

2.2. Задание к лабораторной работе №2

Составить оптимальное расписание работы двух станков при изготовлении группы из восьми деталей и определить трудоемкость их изготовления, руководствуясь правилами метода «ветвей и границ». Номера станков выбрать из табл. 14 согласно варианту, выдан-

ному преподавателем. Трудоемкость изготовления деталей по операциям, выполняемым на каждом станке, представлена в табл. 15.

2.3. Содержание работы

В процессе выполнения лабораторной работы №2 составляют расписание работы ГПС, состоящей из двух станков, для изготовления партии из восьми деталей по данным табл. 14 и табл. 15. Согласно приведенным в данном учебно-методическом пособии правилам метода «ветвей и границ» определяют порядок запуска заготовок на первый станок, а затем – на второй. Составляют диаграмму Ганта.

2.4. Средства технологического оснащения

- Персональный компьютер;
- микрокалькулятор.

2.5. Порядок выполнения работы

- Выбирают номера станков из табл. 14, согласно варианту, выданного преподавателем;
- используя данные табл. 15, оформляют трудоемкость изготовления восьми деталей на двух станках по форме табл. 13;
- разбивают комплект деталей на две группы: в первую группу включают детали, для которых $p_j \leq q_j$, во вторую – детали, для которых $p_j > q_j$;

- включают в расписание работы первого станка заготовки деталей первой группы, предварительно упорядочив их по возрастанию p_j ;
- затем включают в расписание работы первого станка заготовки деталей второй группы, предварительно упорядочив их по убыванию q_j ;
- при условии сохранения той же последовательности обработки на втором станке, что и на первом, составляют расписание работы двух станков в виде последовательности чисел, первая цифра в которых – номер детали, а вторая – номер станка;
- оформляют диаграмму Ганта;
- делают выводы об оптимальности полученного расписания и его возможных альтернативных вариантах.

Таблица 14

Варианты заданий к лабораторной работе №2

Номер варианта	Номера станков	Номер варианта	Номера станков	Номер варианта	Номера станков	Номер варианта	Номера станков
1	1,2	9	1,3	17	1,5	25	8,2
2	3,4	10	2,4	18	2,6	26	7,2
3	5,6	11	5,7	19	3,7	27	6,3
4	7,8	12	6,8	20	4,8	28	5,4
5	2,3	13	1,4	21	1,8	29	5,3
6	4,5	14	2,5	22	2,7	30	6,2
7	6,7	15	3,6	23	3,5	31	7,1
8	8,1	16	4,8	24	4,6	32	8,4

Таблица 15

Трудоемкость изготовления деталей

Номер станка	Номер детали							
	1	2	3	4	5	6	7	8
	Трудоемкость операции, мин							
1	7	3	4	5	8	5	2	3
2	5	4	3	6	8	9	7	2
3	3	2	6	4	4	8	5	2
4	5	2	3	7	2	6	4	3
5	7	8	5	2	3	4	6	9
6	2	5	8	4	9	3	4	6
7	8	2	4	6	3	5	9	7
8	6	4	8	2	9	7	5	3

2.6. Содержание отчета по лабораторной работе №2

Трудоемкость изготовления восьми деталей на двух станках

Номер станка	Номер детали							
	1	2	3	4	5	6	7	8
	Трудоемкость операции, мин							
1								
2								

Распределение деталей по группам и расписание изготовления восьми деталей на двух станках

Гантт-карта расписания изготовления восьми деталей на двух станках (метод «ветвей и границ»)

Выводы

**Лабораторная работа №3. Составление расписаний
при краткосрочном планировании работы
гибких производственных систем
с использованием эвристических решающих правил**

Цель работы: получение навыков организации работы ГПС с использованием эвристических решающих правил.

3.1. Пример составления расписания

Рассмотрим некоторые эвристические алгоритмы на примере составления расписания работы ГПС, состоящей из четырех станков, при изготовлении группы, включающей 8 деталей (табл. 16). Маршруты обработки являются одновариантными, и заготовки последовательно проходят через первый, второй, третий и четвертый станки.

Таблица 16

Трудоемкость изготовления деталей на четырех станках

Номер мер- станка	Номер детали							
	1	2	3	4	5	6	7	8
	Трудоемкость операции, мин							
1	4	6	2	3	4	8	5	2
2	6	3	4	5	8	2	7	10
3	3	2	5	8	5	4	3	7
4	5	2	3	3	2	6	4	3

Составим расписание работы ГПС, используя правила «кратчайшей операции», «максимальной остаточной трудоемкости» и «минимальной остаточной трудоемкости» [5, 14].

Расписание изготовления деталей, составленное в соответствии с правилом кратчайшей операции, применительно к портфелю работ, приведенному в табл. 16, выглядит следующим образом:

Станок 1: 31, 81, 41, 51, 11, 71, 21, 61.

Станок 2: 32, 82, 42, 12, 22, 72, 62, 52.

Станок 3: 33, 83, 43, 23, 13, 73, 63, 53.

Станок 4: 34, 84, 44, 24, 14, 74, 64, 54 (рис. 27).



Рис. 27. Расписание изготовления восьми деталей, построенное по правилу «кратчайшей операции»

Применяя правило максимальной остаточной трудоемкости к деталям, трудоемкость изготовления которых приведена в табл. 16, составим расписание работы ГПС и построим диаграмму Гантта (рис. 28).

Станок 1: 81, 61, 71, 51, 41, 11, 31, 21.

Станок 2: 82, 62, 72, 42, 52, 12, 32, 22.

Станок 3: 83, 63, 73, 43, 53, 13, 33, 23.

Станок 4: 84, 64, 74, 44, 54, 14, 34, 24.

Номер станка	Время, мин												
	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
1	81	61	71	51	41	11	31	21					
2		82	62		72	42		52		12	32	22	
3				83	63	73		43	53	13	33	23	
4					84	64	74		44	54	14	34	24

Рис. 28. Расписание изготовления восьми деталей, построенное по правилу «максимальной остаточной трудоемкости»

Применяя правило минимальной остаточной трудоемкости к деталям, трудоемкость изготовления которых приведена в табл. 16, получим следующее расписание работы ГПС и построим Гантт-карту (рис. 29).

Станок 1: 21, 31, 11, 41, 51, 71, 61, 81.

Станок 2: 22, 32, 12, 52, 42, 62, 72, 82.

Станок 3: 23, 33, 13, 53, 43, 63, 73, 83.

Станок 4: 24, 34, 14, 54, 44, 64, 74, 84.

Существуют и другие решающие правила, в том числе более сложные, построенные на основе комбинирования рассмотренных выше правил. Следует иметь в виду, что для формирования реального расписания работы ГПС необходимо оперировать реальными данными об изготавливаемых деталях и их заготовках и проанализировать с помощью имитационной модели сотни примеров для аргумен-

тированного выбора решающего правила, дающего одно из наилучших расписаний.

Номер станка	Время, мин												
	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
1	21	31 11	41 51	71	61	81							
2		22 32	12	52	42	62	72	82					
3		23	33	13 53			43	63 73		83			
4		24	34	14 54				44	64	74		84	

Рис. 29. Расписание изготовления восьми деталей, построенное по правилу «минимальной остаточной трудоемкости»

При выполнении лабораторной работы №3 используют программу «Schedule» (Расписание), с помощью которой находят и затем распечатывают расписания работы ГПС по правилам «кратчайшей операции», «максимальной остаточной трудоемкости», «минимальной остаточной трудоемкости» (прил. Д).

3.2. Задание к лабораторной работе №3

Составить оптимальное расписание работы ГПС, состоящей из четырех станков, и определить трудоемкость изготовления группы из восьми деталей, используя правила «кратчайшей операции», «максимальной остаточной трудоемкости» и «минимальной остаточной трудоемкости».

доемкости». Номера станков выбрать из табл. 17 согласно варианту, выданному преподавателем. Трудоемкость изготовления деталей по операциям, выполняемым на каждом станке, представлена в табл. 18.

3.3. Содержание работы

Выполняют лабораторную работу №3, используя данные табл. 17 и табл. 8. С помощью программы «Schedule» (Расписание) находят и затем распечатывают расписания работы ГПС по правилам «кратчайшей операции», «максимальной остаточной трудоемкости», «минимальной остаточной трудоемкости» и составляют соответствующие диаграммы Ганта. Оформляют отчет по лабораторной работе.

3.4. Средства технологического оснащения

- Персональный компьютер;
- микрокалькулятор.

3.5. Порядок выполнения работы

- Выбирают номера станков из табл. 17, согласно варианту, выданному преподавателем;
- для выбранных станков, используя данные табл. 18, оформляют трудоемкость изготовления восьми деталей на четырех станках по форме табл. 16;

– входят в компьютерную программу «Schedule» (Расписание) и вводят исходные данные по количеству станков, деталей и трудоемкости изготовления деталей по каждой операции;

– в виде последовательности чисел, первая цифра в которых – номер детали, а вторая – номер станка, получают расписания, используя три эвристических решающих правила: «кратчайшей операции», «максимальной остаточной трудоемкости» и «минимальной остаточной трудоемкости»;

– оформляют полученные всеми тремя вышеназванными методами расписания в виде диаграмм Ганта;

– делают выводы о целесообразности использования того или иного расписания в определенных производственных условиях;

– оформляют отчет по данной лабораторной работе согласно п. 3.6 настоящего учебного пособия.

Таблица 17

Варианты заданий к лабораторной работе №3

Номер варианта	Номера станков	Номер варианта	Номера станков	Номер варианта	Номера станков	Номер варианта	Номера станков
1	1,2,3,4	9	1,3,2,5	17	4,6,8,7	25	6,4,3,2
2	2,3,4,5	10	1,2,3,6	18	4,3,2,1	26	6,3,4,5
3	3,4,5,6	11	1,7,3,2	19	4,5,2,3	27	6,5,7,4
4	4,5,6,7	12	1,3,2,8	20	4,6,5,3	28	6,7,5,8
5	5,6,7,8	13	3,7,6,5	21	5,1,2,3	29	7,2,3,4
6	2,5,6,4	14	3,5,6,4	22	5,3,2,4	30	7,5,4,3
7	2,6,5,7	15	3,6,7,8	23	5,4,3,6	31	7,6,4,5
8	2,8,7,6	16	3,4,2,1	24	5,6,4,7	32	7,8,6,5

Таблица 18

Трудоемкость изготовления деталей

Номер станка	Номер детали							
	1	2	3	4	5	6	7	8
	Трудоемкость операции, мин							
1	7	3	4	5	8	5	2	3
2	5	4	3	6	8	9	7	2
3	3	2	6	4	4	8	5	2
4	5	2	3	7	2	6	4	3
5	7	8	5	2	3	4	6	9
6	2	5	8	4	9	3	4	6
7	8	2	4	6	3	5	9	7
8	6	4	8	2	9	7	5	3

3.6. Содержание отчета по лабораторной работе №3

Трудоемкость изготовления восьми деталей на четырех станках

Номер станка	Номер детали							
	1	2	3	4	5	6	7	8
	Трудоемкость операции, мин							
1								
2								
3								
4								

Расписание изготовления восьми деталей на четырех станках,
полученное методом «кратчайшей операции»

Расписание изготовления восьми деталей на четырех станках,
полученное методом «максимальной остаточной трудоемкости»

Расписание изготовления восьми деталей на четырех станках,
полученное методом «минимальной остаточной трудоемкости»

Гантт-карты расписаний изготовления восьми деталей на четырех станках, полученных методами «кратчайшей операции»,
«максимальной остаточной трудоемкости»
и «минимальной остаточной трудоемкости»

Выводы

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Математическое моделирование – это мощное средство познания природы и общества при организации производственно-хозяйственной деятельности человека. В любом производстве заложена идеальная экономико-математическая модель, с которой проводится постоянное сравнение реального положения вещей с целью приближения реальности к желаемому результату.

Используя методы теории графов, можно эффективно разрабатывать технологические процессы (особенно групповые). Разработанные и представленные в данном разделе пособия программы позволяют исключить громоздкие и трудоемкие вычисления при определении припусков на механическую обработку и операционных размеров.

Одна из областей математического моделирования – линейное программирование позволяет оптимизировать технологические процессы при организации производства, определять рациональное номенклатурное распределение выпускаемой продукции.

Современные условия требуют от производителя быстрого перехода на выпуск новой продукции, так как развитие техники и появление новых технологий способствуют ее скорому моральному старению. Такой подход возможен лишь с использованием методов краткосрочного планирования теории расписаний.

Основной задачей исследования производственных систем и технологических процессов является задача поиска в рамках принятой модели оптимальных решений, которым отвечают экстремальные значения критерия эффективности.

Таким образом, представленное пособие окажет помощь студентам при изучении специальных дисциплин и в дальнейшей производственной деятельности выпускников.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Веткасов, Н. И. Применение теории множеств и теории расписаний для решения организационно-технологических задач : методические указания / Н. И. Веткасов, Ю. В. Псигин. – Ульяновск : УлГТУ, 1997. – 24 с.
2. Веткасов, Н. И. Основы математического моделирования производственных и технологических процессов : программа курса и методические указания / Н. И. Веткасов, Ю. В. Псигин, С. И. Рязанов. – Ульяновск : УлГТУ, 2000. – 28 с.
3. Зарубин, В. С. Математическое моделирование в технике : учебник для втузов / В. С. Зарубин, под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – М. : МГТУ, 2010. – 495 с.
4. Коршунов, Ю. М. Математические основы кибернетики : учебное пособие / Ю. М. Коршунов. – М. : Энергия, 1972. – 376 с.
5. Лабораторные работы по дисциплине «Основы математического моделирования» : учебное пособие / Ю. В. Псигин, С. И. Рязанов, А. Д. Евстигнеев; под ред. Н. И. Веткасова. – Ульяновск : УлГТУ, 2010. – 91 с.
6. Лавров, Л. Г. Экономико-математические методы проектирования и управления АТП : учебное пособие / Л. Г. Лавров. – Нижний Новгород : ННПИ, 1992. – 103 с.
7. Маталин, А. А. Технология машиностроения / А. А. Маталин. – СПб. : Лань, 2008. – 512 с.
8. Ногин, В. Д. Основы теории оптимизации / В. Д. Ногин и др.; под ред. И. О. Протодяконова. – М. : Высшая школа, 1986. – 384 с.
9. Оперативно-производственное планирование в ГПС / под ред. Б. И. Черпакова. – М. : Высшая школа, 1989. – 95 с.
10. Португал, В. М. Теория расписаний / В. М. Португал, А. И. Семенов. – М. : Знание, 1972. – 60 с.

11. Псигин, Ю. В. Лабораторный практикум по дисциплине «Математическое моделирование в машиностроении» : учебное пособие / Ю. В. Псигин; под ред. Н. И. Веткасова. – Ульяновск : УлГТУ, 2014. – 138 с.
12. Псигин, Ю. В. Основы математического моделирования : программа курса и методические указания / Ю. В. Псигин, С. И. Рязанов; под ред. Н. И. Веткасова. – Ульяновск : УлГТУ, 2007. – 40 с.
13. Псигин, Ю. В. Основы математического моделирования : программа курса и методические указания / Ю. В. Псигин; под ред. Н. И. Веткасова. – Ульяновск : УлГТУ, 2015. – 57 с.
14. Псигин, Ю. В. Основы математического моделирования производственных процессов : учебное пособие / Ю. В. Псигин; под ред. Н. И. Веткасова. – Ульяновск : УлГТУ, 2006. – 108 с.
15. Реклейтис, Г. Оптимизация в технике. В 2 кн. / Г. Реклейтис, А. Рейвиндран, К. Рэгсдел. – М. : Мир, 1986.
16. Справочник технолога-машиностроителя: в 2 т. / под ред. А. М. Дальского, А. Г. Косиловой, Р. К. Мещерякова, А. Г. Сулова. – М. : Машиностроение-1, 2001.
17. Худобин, Л. В. Разработка технологических процессов изготовления деталей в курсовых и дипломных проектах : учебное пособие / Л. В. Худобин, В. Р. Берзин, В. Ф. Гурьянихин. – Ульяновск : УлГТУ, 1996. – 148 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адекватность** 17
- Базис** 51
- Базисное решение** 51, 53
- допустимое 50, 53, 57
 - недопустимое 51
 - оптимальное 52, 54
- Гантта диаграмма** 62, 64, 114
- Гибкая производственная система (ГПС)** 60, 64
- Граф** 36, 97
- неориентированный 40, 97
 - ориентированный 36, 97
 - совмещенный 99
- Дерево** 40, 66, 67
- исходное 91, 97
 - производное 91, 97
- Дуга** 36, 38, 43
- Контур** 39, 40
- Кортеж** 32, 33
- Линейное программирование** 49
- Матрица** 37, 38, 53, 77, 78
- Метод «ветвей и границ»** 63, 112
- Множество** 20, 21
- бесконечное 21
 - конечное 21
 - пустое 22
 - универсальное 28
 - упорядоченное 32, 33
- Модель** 10
- знаковая 11
 - математическая 11, 12
 - наглядная 11
 - физическая 11
- Оптимизация** 45, 46
- Оптимум** 47
- локальный 47
 - глобальный 47
- Подмножество** 22
- Путь** 39
- Размерная цепь** 91, 99
- Расписание** 62, 63, 65, 112
- Ребро** 40, 41
- Симплекс-метод** 52, 72
- Табличный метод** 53, 77
- Теория расписаний** 60
- Цепь** 40
- Цикл** 40
- Эвристические решающие Правила** 69
- кратчайшей операции 69
 - максимальной остаточной трудоемкости 70
 - минимальной остаточной трудоемкости 70
- Элемент множества** 20
- Этапы моделирования** 17, 18

ОСНОВНЫЕ ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ПОНЯТИЯ

Автоматизированная транспортно-складская система (АТСС) – система, обеспечивающая централизованное хранение и оперативную доставку к рабочим местам заготовок деталей и технологической оснастки.

Аналитическая модель – модель, позволяющая получать явные зависимости необходимых величин от параметров и переменных, характеризующих изучаемое явление.

Базис – любой набор переменных, таких, что определитель, составленный из коэффициентов при переменных, не равен нулю.

Базисное решение – решение системы уравнений, в которой число переменных больше числа уравнений.

Гибкая производственная система (ГПС) – управляемая средствами вычислительной техники совокупность технологического оборудования, обладающая свойством автоматизированной переналадки при изменении программы производства изделий.

Граф – множество точек плоскости, называемых вершинами, и множество дуг (направленных отрезков), соединяющих эти вершины, или ребер (отрезков), соединяющий две вершины графа.

Дерево – конечный связный неориентированный граф, не имеющий циклов.

Диаграмма Ганта (или Гантт-карта) – геометрический способ задания расписания, при котором каждой работе ставится в соответствие отрезок определенной длины, каждому типу оборудования – прямая линия (ось времени), вдоль которой размещают отрезки – работы, выполняемые на этом оборудовании.

Достоверность – форма существования истины, обоснованной количественным способом (например, экспериментом, логическим доказательством) для познающего субъекта.

Дуга – направленный отрезок в ориентированном графе, соединяющий вершины графа.

Задача краткосрочного планирования (КП) ГПС – задача из класса комбинаторных задач полного упорядочения во времени различных дискретных процессов, предварительно частично упорядоченных во времени согласно технологическим маршрутам.

Имитационная модель – численная математическая модель изучаемого объекта, предназначенная для реализации в процессе машинной имитации на ЭВМ в виде моделирующих алгоритмов (программ).

Исходное дерево – дерево с конструкторскими размерами (связями) и с размерами припусков на обработку.

Контур в ориентированном графе – конечный путь, у которого начальная вершина совпадает с конечной.

Кортеж – последовательность элементов, то есть совокупность элементов, в которой каждый элемент занимает определенное место.

Линейное программирование – область математического программирования, посвященная теории и методам решения экстремальных задач, характеризующихся линейной зависимостью между переменными.

Математическая модель – приближенное, выраженное в математических терминах представление процессов, систем и объектов, с помощью которого устанавливают абстрактные связи между компонентами реального процесса, системы или объекта.

Матричная модель – модель, построенная в виде таблицы (матрицы), позволяющая проводить запись данных в табличной форме, что облегчает их введение в ЭВМ и дает наглядное представление о результатах расчета.

Метод «ветвей и границ» – проведение оценок качества вариантов расписания без полного их расчета и последующая отбраковка ветвей в дереве перебора вариантов.

Методы теории расписаний – методы выбора оптимального расписания при краткосрочном планировании.

Множество – совокупность определенных вполне различаемых объектов, рассматриваемых как единое целое.

Моделирование – исследование явлений, процессов, систем или объектов путем построения и изучения их моделей и использования последних для определения или уточнения характеристик и рациональных способов построения вновь конструируемых технологических процессов, систем и объектов.

Модель – любой образ (мысленный или условный, изображение, описание, схема, чертеж, график, карта и т. п.) объекта, процесса или явления («оригинала» данной модели), используемый в качестве его «заменителя» или представителя.

Неориентированный граф – граф, ребра которого не имеют направления.

Оптимизация – процесс нахождения экстремума функции, т. е. выбор наилучшего варианта из множества возможных или процесс приведения системы в наилучшее (оптимальное) состояние.

Ориентированный граф – граф, дуги которого имеют направление.

Правило «кратчайшей операции» – правило, при котором из текущего портфеля работ, подготовленных к выполнению на данном станке, выбирают детали с минимальным временем обработки заготовок на этом станке.

Правило «максимальной остаточной трудоемкости» – правило, при котором из текущего портфеля работ, подготовленных к выполнению на станке, выбирают заготовки деталей с максималь-

ной суммой времени обработки на всех еще не пройденных станках, включая данный станок.

Правило «минимальной остаточной трудоемкости» – правило, при котором из текущего портфеля работ, подготовленных к выполнению на данном станке, выбирают заготовки деталей с минимальной суммарной трудоемкостью обработки на всех еще не пройденных станках, включая данный станок.

Производное дерево – дерево с технологическими размерами и размерами заготовки.

Путь в ориентированном графе – последовательность дуг, в которой конец каждой предыдущей дуги совпадает с началом следующей.

Размерная цепь – путь в производном дереве, заданный ребром исходного дерева.

Расписание – документ, содержащий сведения: о количестве и номенклатуре выполняемых работ; о моментах начала и окончания каждой работы; о затратах времени и материальных ресурсов на все проводимые работы; о месте и технических средствах выполнения каждой работы.

Ребро в неориентированном графе – отрезок, соединяющий две вершины.

Теория расписаний (ТР) – научная дисциплина, изучающая распределительные задачи, в которых ограничительным ресурсом является время.

Функциональная модель – модель, воспроизводящая функционирование оригинала, полностью отвлекаясь от его содержимого и структуры, связывая с помощью математического соотношения различные входные и выходные величины.

Цепь в неориентированном графе – последовательность ребер.

Цикл в неориентированном графе – конечная цепь, у которой начальная и конечная вершины совпадают.

Численная (числовая) модель – математическое соотношение, характеризующееся тем, что значения необходимых величин можно получить в результате применения методов приближенного решения математических задач.

Эвристические алгоритмы (решающие правила) – правила, которые позволяют построить расписание без полного или частичного перебора вариантов и подбираются и уточняются по опыту эксплуатации производственной системы.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Первая страница (титульный лист) отчета

Ульяновский государственный технический университет
Кафедра «Технология машиностроения»

Дисциплина: «Основы математического моделирования»

ОТЧЕТ по лабораторной работе №

(название лабораторной работы)

Студент

Группа

Дата

Работу выполнил:

(подпись студента)

Работу принял:

(подпись преподавателя)

2017 г.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Минимальные припуски на механическую обработку

Минимальные припуски на черновое обтачивание, растачивание и фрезерование заготовок, полученных горячей штамповкой [5, 11]

Диаметр заготовки, мм	Припуск на размер при длине, мм				
	до 120	свыше 120 до 260	свыше 260 до 500	свыше 500 до 800	свыше 800 до 1250
До 50	1,7	2,0	2,4	2,8	3,2
Свыше 50 до 120	2,0	2,2	2,6	2,9	3,3
»» 120 до 260	2,2	2,4	2,7	3,0	3,4
»» 260 до 500	2,5	2,7	2,8	3,1	3,5

Примечания:

1. Для штамповок из алюминиевых, магниевых и медных сплавов, а также для чернового проката повышенной точности припуски умножают на 0,8.
2. Припуски на все поверхности штамповки принимаются с учетом максимальных габаритных размеров.
3. При закреплении заготовки в патроне длина равна удвоенному расстоянию от наиболее удаленного торца до кулачков патрона.

Минимальные припуски на черновое обтачивание, растачивание и фрезерование поверхностей отливок [11, 14]

Максимальный габаритный размер отливки, мм	Литье заготовок в песчаные формы	Литье заготовок в кокиль и оболочные формы
	Припуск, мм	
До 50	2,2	1,4
Свыше 50 до 120	2,6	1,6
»» 120 до 260	3,3	1,8
»» 260 до 500	4,1	2,0

Примечание. Припуски на все поверхности отливки выбирают с учетом максимального размера (диаметра или длины).

Минимальные припуски на протягивание отверстий [5, 11]

Диаметр, мм	Отверстия подготовленные	
	по 9–11-му квалитетам точности	по 12-му квалитету точности
	Припуск, мм	
До 30	0,35	0,45
Свыше 30 до 50	0,40	0,55
»» 50 до 80	0,50	0,7

Окончание прил. Б

Минимальные припуски на чистовое подрезание
торцов и на чистовое фрезерование плоскостей [11, 14]

Диаметр или ширина, мм	Припуск, мм
До 50	0,3
Свыше 50 до 120	0,4
»» 120 до 260	0,55
»» 260 до 500	0,7

Минимальные припуски на черновое подрезание торцов,
фрезерование и строгание плоскостей [14]

Максимальный габаритный размер, мм	Сталь, полученная горячей штамповкой	Литье в песчаные формы	Цветные и титановые сплавы, полученные штамповкой	Литье в кокиль, оболочковые формы
	Припуск, мм			
До 50	0,9	1,1	0,7	0,6
Свыше 50 до 120	1,0	1,1	0,8	0,7
»» 120 до 260	1,2	1,3	0,9	0,8
»» 260 до 500	1,5	1,6	1,1	1,0

Минимальные припуски на черновое растачивание,
зенкерование и развертывание отверстий [14]

Диаметр отверстия, мм	Чистовое растачивание, зенкерование	Развертывание
	Припуск, мм	
До 10	—	0,12
Свыше 10 до 30	0,5	0,16
»» 30 до 50	0,6	0,2
»» 50 до 120	0,9	—
»» 120 до 500	1,2	—
Примечание. Если развертывание выполняется на двух переходах или операциях, то на предварительное развертывание отводится 2/3 припуска, на окончательное – 1/3.		

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Допуски на диаметры валов и отверстий, а также линейные размеры (ГОСТ 25346 – 82, ГОСТ 25347 – 82, ГОСТ 25348 – 82)

Номинальные размеры, мм	Квалитет точности								
	6-й	7-й	9-й	10-й	11-й	12-й	14-й	15-й	16-й
	Допуск, мм								
Свыше 1 до 3	0,010	0,014	0,020	0,040	0,060	0,120	0,250	0,400	0,600
»» 3 «« 6	0,013	0,018	0,025	0,048	0,080	0,160	0,300	0,480	0,750
»» 6 «« 10	0,016	0,022	0,030	0,058	0,100	0,200	0,360	0,580	0,900
»» 10 «« 18	0,019	0,027	0,035	0,070	0,120	0,240	0,430	0,700	1,100
»» 18 «« 30	0,023	0,033	0,045	0,088	0,140	0,280	0,520	0,840	1,300
»» 30 «« 50	0,027	0,039	0,050	0,100	0,170	0,340	0,620	1,000	1,600
»» 50 «« 80	0,030	0,046	0,060	0,120	0,200	0,400	0,740	1,200	1,900
»» 80 «« 120	0,035	0,054	0,070	0,140	0,230	0,460	0,870	1,400	2,200
»» 120 «« 180	0,040	0,063	0,080	0,160	0,260	0,530	1,000	1,600	2,500
»» 180 «« 260	0,045	0,073	0,090	0,185	0,300	0,600	1,150	1,900	2,900
»» 260 «« 360	0,050	0,084	0,100	0,215	0,340	0,680	1,350	2,200	3,300
»» 360 «« 500	0,060	0,095	0,120	0,250	0,380	0,760	1,550	2,500	3,800
»» 500 «« 630	0,070	0,110	0,140	0,280	0,450	0,900	1,800	2,800	4,500
»» 630 «« 800	0,080	0,120	0,150	0,300	0,500	1,000	2,000	3,000	5,000
»» 800 «« 1000	0,090	0,130	0,170	0,350	0,550	1,100	2,200	3,500	5,500

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Расчет технологических размерных цепей с применением ЭВМ

Данный расчет выполняется с использованием программы «Chains» (Цепи) в такой последовательности [14].

Необходимо войти в программу «Chains» и задать команду расширения экрана. На экране появится таблица в соответствии рис. Г.1, в которую следует занести исходные данные по примеру рис. Г.2, выполняя следующие правила.

В разделе исходных данных в графу «№» заносят порядковые номера технологических размерных цепей из таблицы выполненного задания, составленной по образцу табл. 11 данного пособия.

В графу «Обозначение» записывают обозначение замыкающих звеньев размерных цепей, то есть обозначения конструкторских размеров и размеров припусков.

В графе «Величина» проставляют номинальные значения конструкторских (чертежных) размеров или минимальные значения снимаемых припусков, назначаемых в зависимости от заданной шероховатости обрабатываемых поверхностей, точности и методов обработки по справочной литературе.

В графах «ES» и «EI» проставляют соответственно верхние и нижние предельные отклонения конструкторских размеров с эскиза детали. В графе «Исходное уравнение» записывают исходные уравнения из таблицы, составленной по примеру табл. 11 пособия.

В подразделе «Определяемый параметр» в графу «Обозначение» заносят определяемый размер из таблицы уравнений (см. табл. 11), а в графы «ES» и «EI» – соответственно верхние и нижние предельные отклонения припусков по справочной литературе. Строки, соответствующие замыкающим звеньям – конструкторским размерам, не заполняют.

Окончание прил. Г

После ввода исходных данных необходимо нажать клавишу «Выполнить расчет». На экране (рис. Г.3) в разделе «Технологический размер» в графе «Размер» появятся номинальные значения технологических размеров и размеров заготовки, а в графах «ES» и «EI» – соответственно их верхние и нижние предельные отклонения.

В разделе «Предел. знач-я припуска» в графе «Припуск» появятся расчетные номинальные значения, а в графах «ES» и «EI» – соответственно верхние и нижние предельные отклонения припусков. Знак «—» в графе «EI» является признаком нижнего предельного отклонения и в дальнейших проверочных расчетах его не следует учитывать.

После нажатия клавиши «Сохранить» на экране появится окно «Save file» с предложением записать результаты расчета под любым именем. Набрав в окне имя файла, нажать там же клавишу «Сохранить» и выйти из окна.

Клавиша «Вывести в текстовый файл» служит для входа в окно «Save file», записи и вывода на экран результатов расчета в виде матрицы.

Клавиши «Открыть», «Очистить» и «Закрыть» служат соответственно для входа в окно «Save file», очистки экрана перед новым набором исходных данных и выхода из программы.

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Решение задачи краткосрочного планирования с использованием ЭВМ

При решении данной задачи используется программа «Schedule» (Расписание). Порядок решения задачи следующий [14].

1. Войти в программу. На экране появится перечень эвристических решающих правил (рис. Д.1). Выбрать требуемое правило и щелкнуть левой клавишей мыши.

2. На экране появится предложение выбора количества станков и количества деталей (рис. Д.2). Набрав на клавиатуре необходимое их количество, подвести курсор к «Далее» и перейти к следующей картинке, щелкнув левой клавишей мыши.

3. Появившуюся таблицу (рис. Д.3) заполнить своими данными из табл. 17 (см. п. 3.5 данного учебно- методического пособия), руководствуясь требованиями табл. 18 согласно своему варианту по примеру рис. Д.4.

4. Подвести курсор к «Далее», нажать левую клавишу мыши и на экране появится расписание работы станков ГПС (рис. Д.5).

5. На основании представленного расписания оформить диаграмму Ганта для данного эвристического решающего правила.

6. Выйти из программы и, войдя вновь, повторить действие по пунктам 1 – 5 для других оставшихся правил.

7. Подготовить и оформить отчет, состоящий из распечаток итоговых таблиц с расписаниями, полученными с применением программы «Schedule», и диаграмм Ганта для каждого эвристического решающего правила.

Методы теорий расписаний

Правило кратчайшей операции

Правило максимальной остаточной трудоемкости

Правило минимальной остаточной трудоемкости

Рис. Д.1. Экран начала работы с программой «SCHEDULE»

Методы теорий расписаний

Количество станков:

Далее

Количество деталей:

Рис. Д.2. Экран выбора количества станков и деталей

Правило кратчайшей операции

Далее

Номер станка	Номер детали							
	1	2	3	4	5	6	7	8
	Трудоемкость операции $T_{\text{мин}}$							
1								
2								
3								
4								

Рис. Д.3. Исходная таблица конкретного решающего правила
(В данном примере правила «кратчайшей операции»)

Правило кратчайшей операции

Далее

Номер станка	Номер детали							
	1	2	3	4	5	6	7	8
	Трудоемкость операции Т, мин							
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	5	6	1	3	4	2	6	2
3	6	7	8	10	1	4	2	6
4	3	2	1	6	7	8	9	10

Рис. Д.4. Заполненная исходными данными таблица конкретного решающего правила (В данном примере правила «кратчайшей операции»)

Правило кратчайшей операции

Номер станка	Номер детали							
	1	2	3	4	5	6	7	8
	Трудоемкость операции Т, мин							
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	5	6	1	3	4	2	6	2
3	6	7	8	10	1	4	2	6
4	3	2	1	6	7	8	9	10

Станок 1: 11 21 31 41 51 61 71 81

Станок 2: 32 82 62 42 52 12 72 22

Станок 3: 53 73 63 83 13 23 33 43

Станок 4: 34 24 14 44 54 64 74 84

Рис. Д.5. Итоговая таблица с расписанием, составленным по правилу «кратчайшей операции»

Учебное электронное издание

ВЕТКАСОВ Николай Иванович
ПСИГИН Юрий Витальевич

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Учебно-методическое пособие

Редактор Н. А. Евдокимова

ЛР №020640 от 22.10.97.

ЭИ № 1008. Объем данных 1,8 Мб.

Печатное издание

Подписано в печать 24.11.2017. Формат 60×84 1/16.

Усл. печ. л. 8,60. Тираж 100 экз. Заказ 980.

Ульяновский государственный технический университет,
432027, г. Ульяновск, ул. Сев. Венец, д. 32.

ИПК «Венец» УлГТУ, 432027, г. Ульяновск, ул. Сев. Венец, д. 32.

Тел.: (8422) 778-113
E-mail: venec@ulstu.ru
venec.ulstu.ru